CIRM

Troisième Rencontre Internationale sur les Polynômes à Valeurs Entières

Rencontre organisée par :
Sabine Evrard

29 novembre-3 décembre 2010

Farid Bencherif

Sur une propriété des polynômes de Nörlund

Vol. 2, n° 2 (2010), p. 71-77.

<http://acirm.cedram.org/item?id=ACIRM_2010__2_2_71_0>

Centre international de rencontres mathématiques
U.M.S. 822 C.N.R.S./S.M.F.
Luminy (Marseille) France

Actes des rencontres du C.I.R.M.
Vol. **2** n° 2 (2010) 71-77

Sur une propriété des polynômes de Nörlund

Farid Bencherif

Résumé

In this paper, we prove a remarkable property of the coefficients of Nörlund's polynomials obtained mainly from a result of J.-L. Chabert.

1. Introduction

Cet article synthétise des résultats obtenus dans [2] et [3]. Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition des polynômes de Nörlund de première et deuxième espèce ainsi que celle des polynômes de Stirling. Nous énonçons ensuite le principal résultat qui concerne une propriété remarquable des coefficients des polynômes de Nörlund. La démonstration de ce théorème faite au paragraphe suivant repose essentiellement sur un résultat de J-L Chabert [6]. Un corollaire de notre théorème permet alors de répondre positivement à une ancienne question posée en 1960 par D.S. Mitrinović et R.S. Mitrinović [14].

1.1. **Polynômes de Nörlund.**

Les *polynômes de Nörlund* $B_n^{(x)}$ ([16], chapitre 6) et $b_n^{(x)}$ sont définis par

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(x)} \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^x \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(x)} z^n = \left(\frac{z}{\ln(1+z)}\right)^x. \tag{1.1}$$

Les polynômes de Nörlund $B_n^{(x)}$ sont aussi appelés *nombres généralisés de Bernoulli* d'ordre x ; $B_n^{(1)} = B_n$ est le n-ième *nombre ordinaire de Bernoulli* ; $b_n^{(1)} = b_n$ est appelé n-ième *nombre de Bernoulli de seconde espèce* et aussi n-ième *nombre de Cauchy*. Il est bien connu et facile à prouver que

$$B_{2n+1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1. \tag{1.2}$$

On a

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42},$$

et

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{12}, b_3 = \frac{1}{24}, b_4 = -\frac{19}{729}, b_5 = \frac{3}{160}.$$

Texte exposé lors de la rencontre « Troisième Rencontre Internationale sur les Polynômes à Valeurs Entières » organisée par Sabine Evrard. 29 novembre-3 décembre 2010, C.I.R.M. (Luminy).
Classification Mathématique (2000). 11B68, 11B83.
Mots clés. Bernoulli numbers.

Pour $n \geq 1$, $B_n^{(x)}$ et $b_n^{(x)}$ sont des polynômes en x de degré n à coefficients rationnels et de coefficients dominants respectifs $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ and $\frac{1}{n!2^n}$. On a

$$\begin{cases} B_0^{(x)} = 1 \\ B_1^{(x)} = -\frac{1}{2}x \\ B_2^{(x)} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x \\ B_3^{(x)} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 \\ B_4^{(x)} = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{120}x \\ B_5^{(x)} = -\frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{48}x^4 - \frac{5}{96}x^3 - \frac{1}{48}x^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_0^{(x)} = 1 \\ b_1^{(x)} = \frac{1}{2}x \\ b_2^{(x)} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{24}x \\ b_3^{(x)} = \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{48}x^2 + \frac{1}{8}x \\ b_4^{(x)} = \frac{1}{384}x^4 - \frac{5}{192}x^3 + \frac{97}{1152}x^2 - \frac{251}{2880}x \\ b_5^{(x)} = \frac{1}{3840}x^5 - \frac{5}{1152}x^4 + \frac{61}{2304}x^3 - \frac{401}{5760}x^2 + \frac{19}{288}x. \end{cases}$$

Les *nombres de Stirling* de *première espèce* $s(n,k)$ et de *deuxième espèce* $S(n,k)$ sont définis par ([8], [11]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(\ln(1+z))^k}{k!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z-1)^k}{k!}. \tag{1.3}$$

Il est bien connu que, pour k fixé, $s(n,n-k)$ et $S(n+k,n)$ sont des polynômes en n qui s'expriment à l'aide des polynômes de Nörlund ([4], [10], [15]) :

$$s(n,n-k) = \binom{n-1}{k}B_k^{(n)} \text{ et } S(n+k,n) = \binom{n+k}{k}B_k^{(-n)}. \tag{1.4}$$

Pour n et $k \geq 0$, posons

$$T_n(x) = \binom{x-1}{n}B_n^{(x)}. \tag{1.5}$$

$T_n(x)$ est un polynôme de degré $2n$, appelé *polynôme de Stirling* par D.S. Mitrinović et R.S. Mitrinović. On déduit de (1.4) et (1.5) les relations

$$s(n,n-k) = T_k(n) \ \ (\text{pour } n \geq k) \text{ et } S(n+k,n) = (-1)^k T_k(-n). \tag{1.6}$$

Il est facile de constater à l'aide des relations (1.3) et (1.1) que

$$s(n,n-k) = k!\binom{n}{k}b_k^{(k-n)}. \tag{1.7}$$

On déduit alors de (1.4) et (1.7) la relation suivante

$$(n-x)B_n^{(x)} = -\,n!\,x\,b_n^{(n-x)}. \tag{1.8}$$

1.2. **Les suites d'entiers (M_n), (d_n) et (m_n).**

Nous allons définir trois suites d'entiers (M_n), (d_n) et (m_n) attachées respectivement aux suites de polynômes $(b_n^{(x)})$ et $(B_n^{(x)})$ et $(T_n(x))$.

– La suite des *nombres de Minkowski*, répertoriée *A*053657 dans [17], est la suite d'entiers $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_n := \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \cdots}. \tag{1.9}$$

Remarquons que, si $p > n+1$, le facteur correspond dans le produit (1.9) vaut 1, et donc M_n est en fait un produit fini. La suite d'entiers

$$(M_n)_{n\geq 0} = (1, 2, 24, 48, 5760, 11520, 2903040, 5806080, 1393459200, ...)$$

intervient dans de nombreuses situations (*cf* [12], [6], [7]). Les deux propriétés suivantes faciles à prouver nous seront utiles :

$$(n+1)! \mid M_n \quad \text{et} \quad M_{2n+1} = 2M_{2n} \tag{1.10}$$

– La suite d'entiers $(d_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{M_n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ est répertoriée $A001898$ dans [17] :

$$(d_n)_{n\geq 0} = (1, 2, 12, 8, 240, 96, 4032, 1152, 34560, 7680, 101376...).$$

De (1.10), on déduit que

$$\frac{d_{2n}}{d_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2}. \tag{1.11}$$

– La suite d'entiers $(m_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{M_n}{(n+1)!}\right)_{n\geq 0}$, répertoriée $A163176$ dans [17], a été mise en évidence par D.S. Mitrinović et R.S. Mitrinović dans [14] :

$$(m_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 4, 2, 48, 16, 576, 144, 3840, 768, 9216...).$$

Le résultat suivant est essentiel dans la démonstration du théorème principal qui suit. Rappelons qu'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[x]$ est dit *primitif* si le pgcd de l'ensemble de ses coefficients vaut 1.

Lemme 1. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$M_n\, b_n^{(x)} \text{ est un polynôme primitif de } \mathbb{Z}[x] \tag{1.12}$$

$$d_n\, B_n^{(x)} \text{ est un polynôme primitif de } \mathbb{Z}[x]\ . \tag{1.13}$$

Démonstration. Dans [6], J.-L. Chabert prouve que $(-1)^n M_n\, b_n^{(-x)}$ est un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$. On en déduit (1.12) ainsi que la primitivité du polynôme $M_n\, x\, b_n^{(n-x)}$ de $\mathbb{Z}[x]$. Remarquons alors qu'avec (1.8), on a

$$d_n(n-x)B_n^{(-x)} = -M_n\, x\, b_n^{(n-x)}.$$

Par suite, $d_n(n-x)B_n^{(-x)}$ est aussi un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$; la relation (1.13) en résulte. On peut aussi obtenir la relation (1.13) directement d'après un résultat d'Adelberg ([1], Corollary 3). ☐

1.3. **Le résultat principal.**

Théorème 2. *Avec* $M_n := \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)}\right\rfloor + \cdots}$ *et* $d_n = \frac{M_n}{n!}$, *on a, pour* $n \geq 3$:

$$B_{2n}^{(x)} = \frac{x}{d_{2n}}\left(\alpha_{2n-1}^n x^{2n-1} + \alpha_{2n-2}^n x^{2n-2} + \cdots + \alpha_1^n x + \alpha_0^n\right) \tag{1.14}$$

$$B_{2n+1}^{(x)} = -\frac{x^2}{d_{2n+1}}\left(\beta_{2n-1}^n x^{2n-1} + \beta_{2n-2}^n x^{2n-2} + \cdots + \beta_1^n x + \beta_0^n\right) \tag{1.15}$$

$\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^n x^k$ *et* $\sum_{k=0}^{2n-1} \beta_k^n x^k$ *étant des polynômes primitifs de* $\mathbb{Z}[x]$ *avec*

$$\frac{\alpha_{2n-1}^n}{\beta_{2n-1}^n} = 2n+1,\ \ \frac{\alpha_{2n-2}^n}{\beta_{2n-2}^n} = 2n-1,\ \ \frac{\alpha_{2n-3}^n}{\beta_{2n-3}^n} = 2n-3,\ \ \frac{\alpha_1^n}{\beta_1^n} = 1,\ \ \frac{\alpha_0^n}{\beta_0^n} = 1.$$

Ainsi, on a pour $n = 3$

$$\begin{aligned} d_6 B_6^{(x)} &= x\left(63x^5 - 315x^4 + 315x^3 + 91x^2 - 42x - 16\right) \\ d_7 B_7^{(x)} &= -x^2\left(9x^5 - 63x^4 + 105x^3 + 7x^2 - 42x - 16\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_5^3}{\beta_5^3} = 7\,,\ \frac{\alpha_4^3}{\beta_4^3} = 5\,,\ \frac{\alpha_3^3}{\beta_3^3} = 3\,,\ \frac{\alpha_1^3}{\beta_1^3} = 1\,,\ \frac{\alpha_0^3}{\beta_0^3} = 1.$$

et pour $n = 4$

$$\begin{aligned} d_8 B_8^{(x)} &= x(135x^7 - 1260x^6 + 3150x^5 - 840x^4 - 2345x^3 - 540x^2 + 404x + 144) \\ d_9 B_9^{(x)} &= -x^2(15x^7 - 180x^6 + 630x^5 - 448x^4 - 665x^3 + 100x^2 + 404x + 144) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_7^4}{\beta_7^4} = 9\,,\ \frac{\alpha_6^4}{\beta_6^4} = 7\,,\ \frac{\alpha_5^4}{\beta_5^4} = 5\,,\ \frac{\alpha_1^4}{\beta_1^4} = 1\,,\ \frac{\alpha_0^4}{\beta_0^4} = 1.$$

Remarque 3. Pour $n \geq 1$, on a $B_{2n+1}^{(1)} = B_{2n+1} = 0$. On en déduit que le polynôme $\beta_{2n-1}^n x^{2n-1} + \beta_{2n-2}^n x^{2n-2} + \beta_{2n-3}^n x^{2n-3} + ... + \beta_1^n x + \beta_0^n$ est divisible par $x-1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. Avec les notations du théorème 2, on peut écrire pour $n \geq 1$

$$B_{2n}^{(x)} = \frac{1}{(2n+1)m_{2n}} x P_{2n}(x) \text{ et } B_{2n+1}^{(x)} = \frac{x^2(x-1)}{(2n+2)m_{2n+1}} P_{2n+1}(x),$$

où

$$P_{2n}(x) = \alpha_{2n-1}^n x^{2n-1} + \alpha_{2n-2}^n x^{2n-2} + \alpha_{2n-3}^n x^{2n-3} + \cdots + \alpha_1^n x + \alpha_0^n$$

et

$$(x-1)P_{2n+1}(x) = -(\beta_{2n-1}^n x^{2n-1} + \beta_{2n-2}^n x^{2n-2} + \beta_{2n-3}^n x^{2n-3} + \cdots + \beta_1^n x + \beta_0^n),$$

les polynômes $P_{2n}(x)$ et $P_{2n+1}(x)$ étant des polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant

$$P_{2n}(0) = \alpha_0^n = \beta_0^n = P_{2n+1}(0).$$

1.4. **Propriété des polynômes de Stirling.**

D.S. Mitrinović et R.S. Mitrinović [14] ont déterminé les polynômes de Stirling $T_n(x)$ pour $n \in \{1, 9\}$ et ont trouvé :

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= -\binom{x}{2} \\
T_2(x) &= \frac{1}{4}\binom{x}{3} P_2(x) \\
T_3(x) &= \frac{1}{2}\binom{x}{4} x(x-1)P_3(x) \\
T_4(x) &= \frac{1}{48}\binom{x}{5} P_4(x) \\
T_5(x) &= \frac{1}{16}\binom{x}{6} x(x-1)P_5(x) \\
T_6(x) &= \frac{1}{576}\binom{x}{7} P_6(x) \\
T_7(x) &= \frac{1}{144}\binom{x}{8} x(x-1)P_7(x) \\
T_8(x) &= \frac{1}{3840}\binom{x}{9} P_8(x) \\
T_9(x) &= \frac{1}{768}\binom{x}{10} x(x-1)P_9(x)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 3x-1 \\
P_3(x) &= -1 \\
P_4(x) &= 15x^3 - 30x^2 + 5x + 2 \\
P_5(x) &= -3x^2 + 7x + 2 \\
P_6(x) &= 63x^5 - 315x^4 + 315x^3 + 91x^2 - 42x - 16 \\
P_7(x) &= -9x^4 + 54x^3 - 51x^2 - 58x - 16 \\
P_8(x) &= 135x^7 - 1260x^6 + 3150x^5 - 840x^4 - 2345x^3 - 540x^2 + 404x + 144 \\
P_9(x) &= -15x^6 + 165x^5 - 465x^4 - 17x^3 + 648x^2 + 548x + 144.
\end{aligned}$$

Ils ont constaté que les $P_n(x)$ sont des polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant :

$$P_2(0) = P_3(0)\,,\ P_4(0) = P_5(0)\,,\ P_6(0) = P_7(0)\,, P_8(0) = P_9(0).$$

Ils ont alors posé la question de savoir si cette propriété est vérifiée de manière générale pour le couple de polynômes $(P_{2k}(n),\ P_{2k+1}(n))$ associé au couple de nombres de Stirling $(s(n,n-2k), s(n,n-(2k+1))$ pour tout $k \geq 1$ ([14], page 4). Le corollaire suivant répond positivement à cette question.

Corollaire 4. *Pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$, $P_{2k}(x)$ et $P_{2k+1}(x)$ tels que*

$$s(n,n-2k) = \frac{1}{m_{2k}}\binom{n}{2k+1}P_{2k}(n) \quad (n \geqslant 2k) \tag{1.16}$$

$$s(n,n-2k-1) = \frac{1}{m_{2k+1}}\binom{n}{2k+2}n(n-1)P_{2k+1}(n) \quad (n \geqslant 2k+1), \tag{1.17}$$

$$P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0). \tag{1.18}$$

Démonstration. D'après (1.6), pour $k \geq 1$, on a :

$$s(n,n-2k) = T_{2k}(n) \text{ si } n \geq 2k \text{ et } s(n,n-2k-1) = T_{2k+1}(n) \text{ si } n \geq 2k+1.$$

Compte tenu de la relation (1.5) et de la remarque 3, on a

$$\begin{aligned} T_{2k}(n) &= \binom{n-1}{2k}B_{2k}(n) \\ &= \binom{n-1}{2k}\frac{n}{(2k+1)m_{2k}}P_{2k}(n) \\ &= \frac{1}{m_{2k}}\binom{n}{2k+1}P_{2k}(n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{2k+1}(n) &= \binom{n-1}{2k+1}B_{2k+1}(n) \\ &= \binom{n-1}{2k+1}\frac{n^2(n-1)}{(2k+2)m_{2k+1}}P_{2k+1}(n) \\ &= \frac{1}{m_{2k+1}}\binom{n}{2k+2}n(n-1)P_{2k+1}(n) \end{aligned}$$

où $P_{2k}(x)$ et $P_{2k+1}(x)$ sont primitifs dans $\mathbb{Z}[x]$et vérifient $P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0)$. □

2. Démonstration du théorème principal

Plusieurs auteurs se sont intéressés aux coefficients du polynôme $B_n^{(x)}$ ([5], [9], [13]). Dans [13], (Theorem 1 et Theorem 2), G. D. Liu et H. M. Strivastava ont prouvé la formule explicite donnée dans le lemme suivant :

Lemme 5. *Pour $n \geq 1$, $B_n^{(x)}$ est un polynôme de degré n, de terme constant nul et, pour $1 \leq k \leq n$, le coefficient de x^k est égal à :*

$$\left[x^k\right] B_n^{(x)} = (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=n \\ i_j \geq 1 \ pour \ j=1,\ldots,k}} \frac{B_{i_1}\ldots B_{i_k}}{(i_1\ldots i_k).i_1!\ldots i_k!}.$$

A l'aide de ce lemme, on obtient aisément les relations suivantes

Lemme 6. *Pour $n \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned}
[x^n]\, B_n^{(x)} &= \frac{(-1)^n}{2^n} \\
\left[x^{n-1}\right] B_n^{(x)} &= \frac{(-1)^{n-1}}{3.2^n}\binom{n}{2} \\
\left[x^{n-2}\right] B_n^{(x)} &= \frac{(-1)^n}{3.2^n}\binom{n}{4} \\
[x]\, B_n^{(x)} &= (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n} \\
\left[x^2\right] B_{2n}^{(x)} &= \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n-1}\binom{2n}{2i}\frac{B_{2i}B_{2n-2i}}{2i(2n-2i)} \\
\left[x^2\right] B_{2n+1}^{(x)} &= (2n+1)\frac{B_{2n}}{4n} \\
\left[x^3\right] B_{2n+1}^{(x)} &= -\frac{2n+1}{4}\sum_{1\leq i\leq n-1}\binom{2n}{2i}\frac{B_{2i}B_{2n-2i}}{2i(2n-2i)}.
\end{aligned}$$

On sait que d'après les lemmes 1 et 5 que $d_n B_n^{(x)}$ est un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$, de terme constant nul. De plus d'après la relation (1.2) et le lemme 6, on a $[x]\, B_{2n+1}^{(x)} = \frac{B_{2n+1}}{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$. Le polynôme $d_{2n+1}B_{2n+1}^{(x)}$ est donc divisible par x^2, pour $n \geq 1$. Ainsi se trouvent justifiées les écritures (1.14) et (1.15) ainsi que la primitivité dans $\mathbb{Z}[x]$ des polynômes $\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^n x^k$ et $\sum_{k=0}^{2n-1}\beta_k^n x^k$. Les relations (2) du théorème 2 découlent alors de la relation (1.11) et des relations suivantes déduites du lemme 6 :

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n-1}^n &= d_{2n}\left[x^{2n}\right] B_{2n}^{(x)} &&\text{et}&& \beta_{2n-1}^n = d_{2n+1}\left[x^{2n+1}\right] B_{2n+1}^{(x)}, \\
\alpha_{2n-2}^n &= d_{2n}\left[x^{2n-1}\right] B_{2n}^{(x)} &&\text{et}&& \beta_{2n-2}^n = d_{2n+1}\left[x^{2n}\right] B_{2n+1}^{(x)}, \\
\alpha_{2n-3}^n &= d_{2n}\left[x^{2n-2}\right] B_{2n}^{(x)} &&\text{et}&& \beta_{2n-3}^n = d_{2n+1}\left[x^{2n-1}\right] B_{2n+1}^{(x)}, \\
\alpha_1^n &= d_{2n}\left[x^{2n-2}\right] B_{2n}^{(x)} &&\text{et}&& \beta_1^n = d_{2n+1}\left[x^{2n-1}\right] B_{2n+1}^{(x)}, \\
\alpha_0^n &= d_{2n}\,[x]\, B_{2n}^{(x)} &&\text{et}&& \beta_0^n = d_{2n+1}\left[x^2\right] B_{2n+1}^{(x)}.
\end{aligned}$$

La preuve du théorème 2 est complète.

Références

[1] A. Adelberg, Arithmetic properties of the Nörlund polynomial $B_n^{(x)}$, *Discrete Mathematics*, (H. W. Gould volume) **204** (1999), 5-13.

[2] F. Bencherif et T. Garici, Sur une propriété des polynômes de Stirling, Preprint (soumis).

[3] F. Bencherif et A. Zekiri, On some properties of Nörlund's polynomials, Preprint.

[4] L. Carlitz, Note on the Nörlund polynomial $B_n^{(x)}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 452-455.

[5] L. Carlitz, Some properties of the Norlund polynomial $B_n^{(x)}$, *Math. Nachr.* **33** (1967), 297-311.

[6] J.-L. Chabert, Integer-valued polynomials on prime numbers and logarithm power expansion, *European Journal of Combinatorics* **28** (2007), 754-761.

[7] J.-L. Chabert and P.-J. Cahen, Old Problems and New Questions around Integer-Valued Polynomials and Factorial Sequences, in *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra*, Springer, 2006, 89-108.

[8] L. Comtet Analyse Combinatoire, Presses Universitaires de France, Paris, Vol. 1 & 2, 1970.

[9] I. M. Gessel, On Miki's identity for Bernoulli numbers, *J. Number Theory* **110** (2005),75-82.

[10] H. W. Gould, The Lagrange interpolation formula and Stirling numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 421-425.

[11] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnick, *Concrete Mathematics : a Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, 1994.

[12] R.M. Guralnick and M. Lorentz, Orders of Finite Groups of Matrices, arXiv :math/0511191v1 [math.GR] v1] 8 Nov 2005.

[13] G.-D. Liu and H. M. Srivastava, Explicit Formulas for the Nörlund Polynomials $B_n^{(x)}$ and $b_n^{(x)}$, *Computers & Mathematics with Applications* Vol. 51, n°9-10, (2006), 1377-1384.

[14] D.S. Mitrinović et R.S. Mitrinović, Tableaux qui fournissent des polynômes de Stirling, Publications de la Faculté d'Electronique, série : Mathématiques et physique, N°34, (1960) 1-23.

[15] D.S. Mitrinović, Sur une relation de récurrence relative aux nombres de Bernoulli d'ordre supérieur, *C. R. Acad. Sc. Paris* **250** (1960), 4266-4267.

[16] N.E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin, 1924 ; repr. Chelsea Publ. Comp., New York, 1954.

[17] N.J.A. Sloane, The On-Line Encylopedia of Integer Sequences, http ://www.research.att.com/~njas/sequences/ index.htm.

USTHB, Fac. Math., P.B. 32, El Alia, 16111, Algiers, Algeria. • fbencherif@usthb.dz