

Dérangements et nombres de Genocchi

Dominique Dumont*, Arthur Randrianarivony

E.E.S. Sciences, B.P. 906, 101, Antananarivo, Madagascar

Received 20 July 1992; revised 24 February 1993

Abstract

We make use of the notion of ‘doubled fixed point’ in the graph of an exceeding mapping, to give new combinatorial interpretations (a) for the Euler finite-difference tableau relating the sequence $n!$ to the sequence of derangement numbers, and (b) for the Seidel tableau generating the Genocchi numbers of first and second kind. Further consequences are derived for the combinatorial theory of Genocchi numbers and allied polynomials.

1. Un tableau aux différences d’Euler

On trouve dans l’oeuvre d’Euler¹ le tableau aux différences suivant, où nous notons d_n^k le terme générique ($0 \leq k \leq n$) (voir Tableau 1).

La récurrence définissant les entiers d_n^k est

$$d_n^n = n!, \quad \text{et} \quad d_n^k = d_n^{k+1} - d_{n-1}^k,$$

autrement dit la diagonale est la suite $n!$ et chaque terme est la différence entre celui situé à sa droite et celui situé au-dessus de lui. Dans ce paragraphe, nous allons proposer trois interprétations combinatoires des entiers d_n^k .

Nous donnons la priorité à une interprétation en termes d’applications excédantes. En fait la Proposition 1.1 est surtout destinée à préparer le lecteur à la Proposition 2.1 du paragraphe suivant.

Une application f de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est dite *excédante* si son graphe est situé au-dessus de la diagonale: pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $f(i) \geq i$. Il est clair que le nombre de ces applications est $n!$. Etant donnée une application excédante f , un point $(i, f(i))$ de son graphe est dit *fixe* s’il est sur la diagonale, c’est-à-dire si

* Corresponding author.

¹ Le lecteur nous excusera de ne pas donner la référence précise. Signalons que le tableau d’Euler est orienté différemment et ne comporte pas notre 0-ième colonne, celle des dérangements.

Tableau 1.

n	k					
	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	1	1	2			
3	2	3	4	6		
4	9	11	14	18	24	
5	44	53	64	78	96	120



Fig. 1.

$f(i)=i$, un point fixe est dit *doublé* s'il n'est pas seul sur sa ligne, c'est-à-dire s'il existe $j < i$ tel que $f(j)=f(i)=i$.

Proposition 1.1. L'entier d_n^k est le nombre des applications excédantes f de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dont l'ensemble des points fixes non doublés est inclus dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Exemple. Dénombrons les applications excédantes de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même dont l'ensemble des points fixes non doublés est inclus dans $\{1, 2\}$, autrement dit dont 3 n'est pas un point fixe non doublé. Ce sont 133, 233, 323, et 333. Or $d_3^2=4$.

Démonstration. Notons provisoirement f_n^k le nombre des applications f en question. Il est clair que $f_n^n=n!$ puisqu'il n'y a aucune condition restrictive quand $k=n$. D'autre part $f_n^{k+1}-f_n^k$ est le nombre des f dont le plus grand point fixe non doublé est $k+1$. Supprimons du graphe de f la $(k+1)$ -ième ligne et la $(k+1)$ -ième colonne, qui ne contiennent pas d'autre point que $(k+1, k+1)$ (voir Fig. 1). Nous obtenons après renumérotage des lignes et colonnes le graphe d'une application excédante g de $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dans lui-même dont l'ensemble des points fixes non doublés est inclus dans $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. L'application $f \mapsto g$ étant clairement bijective, on a donc $f_n^{k+1}-f_n^k=f_{n-1}^k$, et par conséquent $f_n^k=d_n^k$.

Proposition 1.2. L'entier d_n^k est le nombre des permutations σ de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dont l'ensemble des points fixes est inclus dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

On peut faire une démonstration directe analogue à celle de la Proposition 1.1, mais nous préférons mettre en évidence une bijection entre permutations σ et applications excédantes f qui nous sera utile par la suite. Précisons la terminologie: étant donnée une permutation σ décomposée en ses cycles, nous désignons un entier $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ qui est le plus grand parmi ceux de son cycle sous l'action de σ comme un *maximum de cycle*. Les points fixes de σ font donc partie de ses maxima de cycles. D'autre part on appelle *valeur d'excédance* tout entier i supérieur ou égal à son antécédent: $\sigma^{-1}(i) \leq i$.

Proposition 1.3. *Il existe une bijection $\sigma \mapsto f$ qui est telle que:*

- (1) *Un élément j est un maximum de cycle de σ si et seulement si c'est un point fixe de f .*
- (2) *Un élément j est un point fixe de σ si et seulement si c'est un point fixe non doublé de f .*
- (3) *Un élément j est une valeur d'excédance de σ si et seulement si c'est une valeur de f , c'est-à-dire s'il possède au moins un antécédent par f .*

Démonstration. Etant donnée σ , on construit f de la manière suivante: $f(i)$ est le premier entier supérieur ou égal à i que l'on rencontre lorsqu'on décrit l'orbite de i sous l'action de σ en commençant par $\sigma(i)$, puis $\sigma^2(i)$, etc. Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(j)=j$ est que j soit maximum dans son cycle. En supposant cela réalisé, si j n'est pas seul dans son cycle alors c'est un point fixe doublé de f , car $\sigma^{-1}(j) < j$ donc on a $f(\sigma^{-1}(j))=j=f(j)$. Le même argument vaut pour tout autre j qui est une valeur d'excédance: on a $f(\sigma^{-1}(j))=j$ donc j est une valeur de f . En revanche il est clair que si $j < \sigma^{-1}(j)$, j ne peut être une valeur de f .

Il ne reste plus qu'à prouver que l'application $\sigma \mapsto f$ ainsi définie est une bijection. Nous allons montrer sur un exemple comment on remonte de f à σ . Soit par exemple $n=9$ et f donnée par la liste de ses images: $f=6, 4, 9, 6, 7, 9, 7, 9, 9$, autrement dit $f(1)=6, f(2)=4$, etc. On repère d'abord les points fixes de f , ici 7 et 9, qui seront les maxima des cycles de σ , et on les place en fins de cycles: $\sigma=(\dots, 7)(\dots, 9)$. Si j est un maximum de cycle, on recherche ses antécédents de première génération, c'est-à-dire les i tels que $f(i)=j$. Pour que j soit le premier entier $\geq i$ qu'on rencontre en décrivant le cycle à partir de $\sigma(i)$, il convient de placer ces antécédents de première génération i_1, i_2 , etc. avant j et par ordre décroissant. Ce qui donne: $\sigma=(5, 7)(\dots, 8, \dots, 6, \dots, 3, 9)$. Si un antécédent i de première génération possède à son tour des antécédents h par f , soient h_1, h_2 , etc., on dit que ce sont des antécédents de deuxième génération de j , on les insère dans le cycle juste avant i et par ordre décroissant. D'où $\sigma=(5, 7)(8, \dots, 4, 1, 6, 3, 9)$. Et ainsi de suite jusqu'à épuisement des antécédents de toutes générations du point fixe j . Dans notre exemple il ne reste plus qu'un antécédent de troisième génération de 9, à savoir 2, qu'on place juste avant 4, d'où $\sigma=(5, 7)(8, 2, 4, 1, 6, 3, 9)$. Cet algorithme, que nous ne détaillons pas davantage (on pourrait le faire dans le formalisme des arborescences), montre que la correspondance $\sigma \mapsto f$ est bijective. \square

Corollaire. L'entier d_n^0 est égal à d_n , nombre des permutations sans point fixe, ou dérangements, et c'est aussi le nombre des applications excédantes dont tous les points fixes sont doublés.

Notons que ce corollaire se déduit aussi de résultats très classiques sur les dérangements. C'est ainsi qu'en itérant l'équation aux différences définissant les d_n^k , on obtient la formule bien connue:

$$\begin{aligned} d_n^0 &= \binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Nous terminerons ce paragraphe en signalant que la statistique des successions [17], qui se lit sur la représentation linéaire des permutations, permet également d'interpréter les entiers d_n^k . Etant donnée une permutation σ de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ et $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, on dit que σ présente une *succession* en i si l'on a $\sigma(i) = \sigma(i-1) + 1$, avec la convention que $\sigma(0) = 0$. La position de la succession est i , sa valeur est $\sigma(i)$. On a le résultat suivant: l'entier d_n^k est le nombre des permutations σ de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dont l'ensemble des valeurs de successions est inclus dans $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. On peut raisonner comme pour la proposition 1, en observant que si la plus grande valeur de succession d'une permutation σ est $k+1$, quand on retire cette valeur $k+1$ et qu'on diminue de 1 toutes les valeurs qui lui sont strictement supérieures, on obtient une permutation τ de $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dont l'ensemble des valeurs de successions est inclus dans $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, d'où la récurrence des d_n^k .

Remarques. (1) On peut dans cet énoncé remplacer *valeurs de successions* par *positions de successions*, car ces deux paramètres s'échangent dans l'involution $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$.

(2) Comme corollaires, le nombre des dérangements d_n^0 est aussi le nombre des permutations *sans succession* (la bijection est moins évidente qu'il n'y paraît à première vue), et l'entier d_n^1 est le nombre des permutations *sans succession interne*, c'est-à-dire sans succession autre que (éventuellement) la succession 01, considérée comme externe. Pour plus de détails sur la suite d_n^1 , voir [14, 17].

2. Le tableau de Seidel des nombres de Genocchi

On appelle tableau de Seidel des nombres des Genocchi le tableau des entiers e_n^{2k} construit de la manière suivante, pour $n \geq 1$ et $0 \leq 2k \leq n$:

$$\begin{aligned} e_1^0 &= 1, \\ e_{2n}^{2n} &= 0, \quad e_{2n}^{2k} = e_{2n}^{2k+2} + e_{2n-1}^{2k} \quad (0 \leq 2k \leq 2n-2), \\ e_{2n+1}^0 &= e_{2n}^0, \quad e_{2n+1}^{2k} = e_{2n+1}^{2k-2} + e_{2n}^{2k} \quad (2 \leq 2k \leq 2n). \end{aligned}$$

Voir Tableau 2 pour les premières valeurs des entiers e_n^{2k} , pour $1 \leq n \leq 8$

Tableau 2.

n	2k				
	0	2	4	6	8
1	1				
2	1	0			
3	1	1			
4	2	1	0		
5	2	3	3		
6	8	6	3	0	
7	8	14	17	17	
8	56	48	34	17	0

Il est clair qu’une manière équivalente de définir le Tableau 2 est la suivante:

$$e_1^0 = 1,$$

$$e_{2n}^{2k} = e_{2n-1}^{2k} + e_{2n-1}^{2k+2} + \dots + e_{2n-1}^{2n-2} \quad (0 \leq 2k \leq 2n-2), \quad e_{2n}^{2n} = 0,$$

$$e_{2n+1}^{2k} = e_{2n}^0 + e_{2n}^2 + \dots + e_{2n}^{2k} \quad (0 \leq 2k \leq 2n).$$

On définit plus classiquement les nombres de Genocchi G_{2n} par leur fonction génératrice²

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - 3\frac{t^6}{6!} + 17\frac{t^8}{8!} - \dots + (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Ou par leur relation avec les nombres de Bernoulli

$$G_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n}.$$

Seidel a démontré [18] que l’on a $e_{2n-1}^{2n-2} = e_{2n-2}^{2n-2} = G_{2n}$, ce qui fournit une méthode très simple pour calculer les nombres de Genocchi. La preuve de Seidel est reproduite dans [9, 6, 21]. Par ailleurs on définit les nombres de Genocchi médians H_{2n+1} (ou nombres de Genocchi de deuxième espèce) comme étant ceux qui apparaissent dans la colonne de gauche du tableau de Seidel: $e_{2n}^0 = e_{2n+1}^0 = H_{2n+1}$.

Nous allons donner du tableau de Seidel une interprétation combinatoire différente de celle donnée en [9], et qui présente l’intérêt, outre la similitude avec l’étude ci-dessus des entiers d_n^k , de se rattacher étroitement aux modèles combinatoires apparaissant en [4, 5, 7, 12], plus précisément à celui des *escaliers surjectifs* (encore appelés *pistolets surjectifs*). Un *escalier surjectif* F de taille $2n$ est le graphe d’une application excédante f de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ dans $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ dont l’ensemble-image est exactement l’ensemble des entiers pairs $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, qui est donc surjective sur cet ensemble. On représente l’escalier F dans un diagramme de $2n$ colonnes et n lignes

² Genocchi était, comme Seidel, un mathématicien du siècle dernier. En fait on a un peu oublié le fait que les nombres de Genocchi étaient bien connus d’Euler (Opera Omnia, vol. X, p. 380).

(les lignes paires) qui de bas en haut ont pour longueurs $2, 4, 6, \dots, 2n$. L'escalier F a exactement un point dans chaque colonne du diagramme, et au moins un point dans chaque ligne (cf. Figs. 2, 3, 4). Dans la démonstration de la Proposition 2.1 nous raisonnerons sur cette figure géométrique où F est représenté dans son diagramme, plus maniable que l'application f elle-même.

Dans [5] nous avons montré que le nombre d'escaliers surjectifs de taille $2n$ est le nombre de Genocchi G_{2n+2} , résultat qui apparaîtra ici comme un corollaire de l'interprétation que nous allons donner du tableau de Seidel. Etant donné un escalier surjectif F de taille $2n$, il est clair que $2n$ est un point fixe doublé (pour alléger l'écriture, nous désignons un point fixe par son abscisse), puisqu'on a nécessairement $f(2n-1)=f(2n)=2n$. Le plus grand point fixe non doublé de F , s'il existe, est donc un entier pair $2k$ qui est compris entre 2 et $2n-2$, et s'il n'existe pas nous convenons de dire qu'il est égal à 0. Dans ces conditions on a l'énoncé suivant:

Proposition 2.1. *Pour tout $n \geq 1$ et pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$,*

(1) *l'entier e_{2n}^{2k} est égal au nombre des escaliers surjectifs F de taille $2n$ dont le plus grand point fixe non doublé est $2k$.*

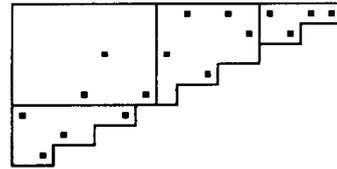
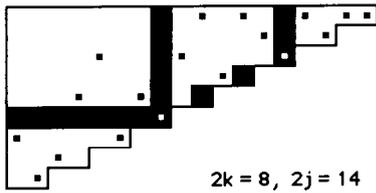


Fig. 2.

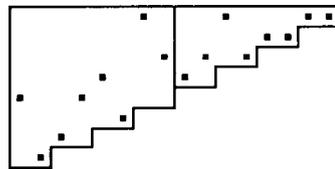
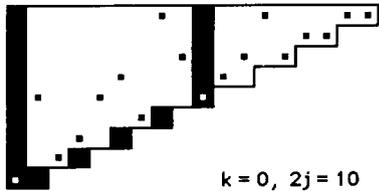


Fig. 3.

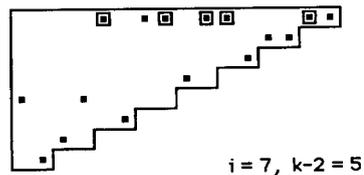
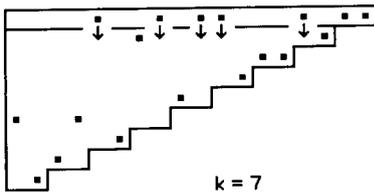


Fig. 4.

(2) l'entier e_{2n+1}^{2k} est égal au nombre des escaliers surjectifs F de taille $2n$ dont tous les points fixes strictement supérieurs à $2k$ sont doublés.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le point (2) est conséquence immédiate du point (1), car si (1) est vérifié, l'égalité

$$e_{2n+1}^{2k} = e_{2n}^0 + e_{2n}^2 + \cdots + e_{2n}^{2k},$$

permet de déduire que e_{2n+1}^{2k} est le nombre des escaliers surjectifs F de taille $2n$ dont le plus grand point fixe non doublé est au plus égal à $2k$, autrement dit dont tous les points fixes strictement supérieurs à $2k$ sont doublés.

Nous faisons à présent l'hypothèse que le point (2) est vrai pour $2n-1$, ce qui, en posant $j=k+1$, s'énonce ainsi: *pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$, l'entier e_{2n-1}^{2j-2} est égal au nombre des escaliers surjectifs F de taille $2n-2$ dont tous les points fixes $\geq 2j$ sont doublés.* A partir de là nous allons démontrer le point (1). Nous considérons donc les escaliers surjectifs F de taille $2n$ dont le plus grand point fixe non doublé vaut $2k$, et partitionnons cet ensemble selon la valeur $2j$ du plus petit point fixe de F strictement supérieur à $2k$. Il est clair que $2j$ existe, vérifie $2k+2 \leq 2j \leq 2n$, et est un point fixe doublé. Nous allons montrer que si l'on fixe $2k$ et $2j$, le nombre des escaliers concernés, qui a priori dépend de n , k , et j , ne dépend en fait que de n et de j , et vaut e_{2n-1}^{2j-2} . Soit donc F un escalier de ce type. Nous distinguons deux cas, selon que $2k \geq 2$, ou que $k=0$.

(a) Si $2k \geq 2$, nous supprimons (cf. Fig. 2) la ligne et la colonne du point fixe $2k$, qui, en dehors du point $(2k, 2k)$ sont vides puisqu'il est non doublé, nous supprimons de même la colonne du point fixe $2j$, vide en dehors de ce point fixe, enfin nous supprimons les éventuelles cases fixes intermédiaires $(2k+2, 2k+2), \dots$ jusqu'à $(2j-2, 2j-2)$, vides aussi puisque $2j$ est le plus petit point fixe $> 2k$.

(b) Si $k=0$, cela signifie que F n'a pas de point fixe non doublé, ce qui implique que $f(1)=2$ car la surjectivité de f sur la ligne 2 ne peut être assurée par le seul (éventuel) point $(2, 2)$. Nous supprimons alors (cf. Fig. 3) la première colonne, celle du point $(1, 2)$, puis nous opérons comme au a) en supprimant également la colonne de $2j$, qui est dans le cas présent le plus petit point fixe, vérifiant $2 \leq 2j \leq 2n$, et en supprimant enfin les éventuelles cases fixes inférieures $2, 4, \dots, 2j-2$.

Dans les deux cas, il est clair qu'on a supprimé exactement $2n$ cases du diagramme de F , que les cases restantes constituent, après renumérotage des lignes et colonnes, un diagramme de la forme requise et de taille $2n-2$, et que la trace de F sur ce diagramme est un escalier G surjectif, car la seule ligne de F où nous avons supprimé un point et qui figure dans G est la ligne $2j$ de F qui est devenue la ligne $2j-2$ de G , or cette ligne est restée non vide puisque $2j$ était doublé dans F . D'autre part si G possède un point fixe sur une ligne $2l \geq 2j$, celui-ci est doublé car il provient d'un point fixe $2l+2$ doublé dans F . Par conséquent l'escalier G ainsi obtenu appartient à l'ensemble des escaliers de taille $2n-2$ dont tous les points fixes $2l \geq 2j$ sont doublés, ensemble dénombré par e_{2n-1}^{2j-2} par hypothèse de récurrence. Par ailleurs, l'application $F \mapsto G$ est bijective, car on se convainc aisément qu'étant donné un entier j compris entre 1 et n , un escalier

G de taille $2n-2$ dont tous les points fixes $2l \geq 2j$ sont doublés, et un entier k tel que $0 \leq k < j$, il n'existe qu'un seul escalier F de taille $2n$ antécédent de G par cette application, dont le plus grand point fixe non doublé vaut $2k$, et dont le plus petit point fixe strictement supérieur à $2k$ est $2j$. En faisant varier $2j$ entre $2k+2$ et $2n$, on obtient

$$e_{2n-1}^{2k} + e_{2n-1}^{2k+2} + \dots + e_{2n-1}^{2n-2} = e_{2n}^{2k},$$

comme nombre d'escaliers surjectifs F de taille $2n$ dont le plus grand point fixe non doublé est $2k$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Corollaire 2.2. *Le nombre de Genocchi G_{2n} est le nombre des escaliers surjectifs de taille $2n-2$, et le nombre de Genocchi médian H_{2n+1} est le nombre des escaliers surjectifs de taille $2n$ dont tous les points fixes sont doublés.*

Cela résulte de la proposition précédente, en sommant sur k , ou en faisant $k=0$.

Corollaire 2.3. *Pour $1 \leq k \leq n$, l'entier e_{2n-1}^{2k-2} est le nombre des escaliers surjectifs de taille $2n$ dont tous les points fixes sont doublés et dont le plus petit point fixe est $2k$.*

Cela résulte de la démonstration de la proposition, dans le cas (b).

On peut encore retraduire la Proposition 2.1 à l'aide de la proposition 1.3, en notant que la bijection de cette proposition met en correspondance les escaliers surjectifs de taille $2n$ avec les permutations σ dont l'ensemble des valeurs d'excédances est l'ensemble des nombres pairs, puis, en posant $\tau = \sigma^{-1}$, avec les permutations τ telles que

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad \tau(2i-1) > 2i-1 \quad \text{et} \quad \tau(2i) \leq 2i.$$

Ainsi nous retrouvons le dénombrement de ces permutations par G_{2n+2} , déjà donné dans [5]. En considérant la valeur du plus grand $2k$ point fixe de τ on obtient le tableau de Seidel. En particulier, en considérant le cas $k=0$, nous trouvons une classe de dérangements, intéressants par les symétries qu'ils présentent, à travers le résultat suivant, qui était annoncé dans [1]:

Corollaire 2.4. *Le nombre de Genocchi médian H_{2n+1} est le nombre des dérangements de Genocchi, c'est-à-dire des permutations τ de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ vérifiant la condition suivante:*

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad \tau(2i-1) > 2i-1 \quad \text{et} \quad \tau(2i) < 2i.$$

Ces permutations sont caractérisées par le fait que dans la représentation linéaire de τ la ligne brisée réunissant des segments joignant $(i, \tau(i))$ à $(i+1, \tau(i+1))$ franchit la diagonale à chaque pas. Dans le Tableau 3 nous montrons successivement, pour la taille 6, les escaliers du Corollaire 2.2, les permutations σ qui leur correspondent selon la Proposition 1.3 (dans leur écriture en cycles), et les permutations $\tau = \sigma^{-1}$ (dans leur écriture linéaire).

Tableau 3.

F:	224466	224666	244466	244666	246466	246666	264466	264666
σ :	(12)(34)(56)	(12)(5346)	(56)(3124)	(531246)	(536)(124)	(512436)	(34)(5126)	(534126)
τ :	214365	215364	314265	315264	415263	514263	514362	415362

3. La génération de Gandhi des nombres de Genocchi

Appelons *polynômes de Gandhi* de première et de deuxième espèce les deux suites de polynômes $B_n(x)$ et $C_n(x)$ définis comme suit:

$$\begin{cases} B_1(x) = x^2, \\ B_n(x) = x^2 B_{n-1}(x+1) - x^2 B_{n-1}(x) \quad (n \geq 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = x^2, \\ C_n(x) = x^2 C_{n-1}(x+1) - x(x+1) C_{n-1}(x) \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Les premières valeurs de ces polynômes jusqu'à $n=4$ sont les suivantes:

$$B_1(x) = x^2, \quad B_2(x) = x^2 + 2x^3,$$

$$B_3(x) = 3x^2 + 8x^3 + 6x^4, \quad B_4(x) = 17x^2 + 54x^3 + 60x^4 + 24x^5,$$

$$C_1(x) = x^2, \quad C_2(x) = x^2 + x^3,$$

$$C_3(x) = 2x^2 + 4x^3 + 2x^4, \quad C_4(x) = 8x^2 + 22x^3 + 20x^4 + 6x^5.$$

Plus généralement, notons

$$B_n(x) = \sum_{2 \leq k \leq n+1} B_{n,k} x^k, \quad C_n(x) = \sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n,k} x^k.$$

En identifiant les coefficients de x^k , on obtient les récurrences sur les $B_{n,k}$ et sur les $C_{n,k}$:

$$B_{n,k} = \binom{k-1}{k-2} B_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} B_{n-1,k} + \dots + \binom{i}{k-2} B_{n-1,i}$$

$$+ \dots + \binom{n}{k-2} B_{n-1,n},$$

$$C_{n,k} = \left(\binom{k-1}{k-2} - 1 \right) C_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} C_{n-1,k} + \dots + \binom{i}{k-2} C_{n-1,i}$$

$$+ \dots + \binom{n}{k-2} C_{n-1,n},$$

avec les mêmes conditions initiales: $B_{1,2} = C_{1,2} = 1$, et $B_{1,k} = C_{1,k} = 0$ pour $k \neq 2$.

Nous allons interpréter combinatoirement ces deux suites de polynômes en termes d'escaliers surjectifs. Signalons qu'il existe une interprétation [20] des polynômes $2^{2n} B_n(x)$ qu'on ne sait pas relier à la première partie, figurant déjà dans [5], de la

Proposition 3.1 suivante. Etant donné un escalier surjectif F de taille $2n$, un point de F situé sur la ligne supérieure du diagramme, c'est-à-dire un i pour lequel $f(i)=2n$, est dit *point maximal* de F . Le nombre k des points maximaux de F est au moins égal à 2, car $f(2n-1)=f(2n)=2n$, et il est au plus égal à $n+1$, car F possède en tout $2n$ points, dont au moins $n-1$ qui ne sont pas maximaux car chacune des $n-1$ lignes non maximales possède au moins un point.

Proposition 3.1. (a) *Le nombre des escaliers surjectifs de taille $2n$ qui possèdent k points maximaux est égal à $B_{n,k}$.*

(b) *Le nombre des escaliers surjectifs de taille $2n$ dont tous les points fixes sont doublés et qui possèdent k points maximaux est égal à $C_{n,k}$.*

Démonstration. Supposons la proposition vraie pour $n-1$. Soit l'application restriction r qui, à tout escalier surjectif F de taille $2n$, fait correspondre l'escalier $G=r(F)$ de taille $2n-2$ défini comme suit: pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 2n-2\}$, $g(i) = \inf(f(i), 2n-2)$. Si k est le nombre de points maximaux de F , $k-2$ d'entre eux sont abaissés sur la ligne supérieure de G (cf. Fig. 4). Le nombre i des points maximaux de G est donc au moins égal à $k-1$ (car F possédait au moins un point sur cette ligne), et au plus égal à n , comme nous l'avons noté précédemment. Réciproquement, soit l'un des $B_{n-1,i}$ escaliers G de taille $2n-2$ ayant i points maximaux. Un antécédent F de G par l'application r est entièrement déterminé par le choix des points maximaux de G qu'on remonte sur la ligne $2n$ pour qu'ils soient des maximaux de F (en compagnie des deux inévitables $(2n-1, 2n)$ et $(2n, 2n)$). Par conséquent, parmi les 2^i-1 antécédents F de G par r , il en existe exactement $\binom{i}{k-2}$ qui ont k points maximaux, k variant de 2 à $i+1$. Il existe donc $\binom{i}{k-2} B_{n-1,i}$ escaliers F de taille $2n$ ayant k maximaux dont l'image par r possède i maximaux. En faisant varier i de $k-1$ à n , on trouve

$$\binom{k-1}{k-2} B_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} B_{n-1,k} + \dots + \binom{i}{k-2} B_{n-1,i} + \dots + \binom{n}{k-2} B_{n-1,n}$$

$= B_{n,k}$ escaliers F de taille $2n$ ayant k points maximaux, ce qui achève la démonstration du premier point.

Il est clair que si F a tous ses points fixes doublés, il en va de même de sa restriction G , car le point fixe $(2n-2, 2n-2)$ de G est toujours doublé. En revanche, si G a tous ses points fixes doublés, il possède un antécédent (et un seul) F par r ayant un point fixe non doublé, c'est celui qu'on obtient en remontant tous les points maximaux de G à l'exception de son point fixe $(2n-2, 2n-2)$, qui devient alors point fixe non doublé de F . Dans ce cas, le décompte des points maximaux donne, en gardant les conventions précédentes: $i=k-1$. Soit donc un escalier G de taille $2n-2$ dont tous les points fixes sont doublés. S'il possède $k-1$ points maximaux, il a $(\binom{k-1}{k-2}-1)$ antécédents F avec k points maximaux et dont tous les points fixes sont doublés. Mais si G possède $i > k-1$ points maximaux, tous ses $\binom{i}{k-2}$ antécédents F avec k maximaux ont tous leurs points fixes doublés. D'où la récurrence des $C_{n,k}$. \square

Corollaire 3.2. On a:

$$G_{2n} = B_{n-1}(1) = \sum_{2 \leq k \leq n} B_{n-1,k} = B_{n,2}, \quad H_{2n+1} = C_n(1) = \sum_{2 \leq k \leq n} C_{n,k} = C_{n+1,2}.$$

En effet, en sommant sur k on obtient dans le premier cas le dénombrement de tous les escaliers surjectifs de taille $2n-1$, qui, d'après le corollaire 2.2 du paragraphe précédent est le nombre de Genocchi G_{2n} , d'où la première identité, qu'on appelle *génération de Gandhi des nombres de Genocchi* car elle est équivalente à une conjecture formulée par Gandhi [11], démontrée par des calculs analytiques en [1, 2, 16]. Nous venons donc, à l'aide des Propositions 2.1 et 3.1, d'en donner une preuve combinatoire, plus simple et plus directe que celle proposée en [9, 21].

Dans le deuxième cas on obtient, en sommant sur k , le dénombrement des escaliers surjectifs dont tous les points fixes sont doublés, qui, toujours d'après le même corollaire, est le nombre de Genocchi médian H_{2n+1} , d'où la seconde identité que nous conviendrons d'appeler *génération de Gandhi des nombres de Genocchi médians*.

Signalons qu'il existe une extension polynomiale de symétrie trivariée des polynômes de Gandhi de première espèce [7], qui conduit d'une part à des calculs intéressants [3], d'autre part à des résultats combinatoires [7, 12] qui généralisent notre Proposition 3.1(a). Il serait intéressant de généraliser également la Proposition 3.1(b).

Introduisons à présent les séries génératrices ordinaires $B(x; t)$ et $C(x; t)$ des polynômes $B_n(x)$ et $C_n(x)$, qui peuvent être développées en séries de fractions rationnelles quand on itère leurs équations fonctionnelles:

$$\begin{aligned} B(x; t) &= \sum_{n \geq 1} B_n(x)t^n = x^2t + \sum_{n \geq 2} [x^2 B_{n-1}(x+1) - x^2 B_{n-1}(x)]t^n \\ &= x^2t + x^2t B(x+1; t) - x^2t B(x; t) \\ &= \frac{x^2t}{1+x^2t} + \frac{x^2t}{1+x^2t} B(x+1; t) \\ &= \frac{x^2t}{1+x^2t} + \frac{x^2(x+1)^2t^2}{(1+x^2t)(1+(x+1)^2t)} \\ &\quad + \frac{x^2(x+1)^2(x+2)^2t^3}{(1+x^2t)(1+(x+1)^2t)(1+(x+2)^2t)} + \dots \\ C(x; t) &= \sum_{n \geq 1} C_n(x)t^n = x^2t + \sum_{n \geq 2} [x^2 c_{n-1}(x+1) - x(x+1) C_{n-1}(x)]t^n \\ &= x^2t + x^2t C(x+1; t) - x(x+1)t C(x; t) \\ &= \frac{x^2t}{1+x(x+1)t} + \frac{x^2t}{1+x(x+1)t} C(x+1; t) \\ &= \frac{x^2t}{1+x(x+1)t} + \dots \\ &\quad + \frac{x^2(x+1)^2 \dots (x+n-1)^2 t^n}{(1+x(x+1)t)(1+(x+1)(x+2)t) \dots (1+(x+n-1)(x+n)t)} + \dots \end{aligned}$$

Pour les séries génératrices ordinaires des nombres de Genocchi, on déduit donc les développements suivants en portant $x=1$:

Corollaire 3.3. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} G_{2n+2} t^n &= \frac{t}{1+t} + \frac{4t^2}{(1+t)(1+4t)} + \frac{36t^3}{(1+t)(1+4t)(1+9t)} \\ &\quad + \cdots + \frac{(n!)^2 t^n}{(1+t)(1+4t) \cdots (1+n^2 t)} + \cdots \\ \sum_{n \geq 1} H_{2n+1} t^n &= \frac{t}{1+2t} + \frac{4t^2}{(1+2t)(1+6t)} \\ &\quad + \cdots + \frac{(n!)^2 t^n}{(1+2t)(1+6t) \cdots (1+n(n+1)t)} + \cdots \end{aligned}$$

On trouvera dans [1] une preuve analytique directe de ces deux identités, et par conséquent de la génération de Gandhi des nombres de Genocchi G_{2n} et H_{2n+1} .

Signalons pour conclure d'autres représentations des séries $B(x; t)$ et $C(x; t)$, d'une part des développements en séries de fractions rationnelles, dont le second est dû à Ismail et Stewart ([13], identité (1.12)), le premier se démontrant de manière analogue, d'autre part des fractions continues de type Stieltjes, démontrées dans [8]:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} B(x; t) &= 1 + \frac{xt}{1+t} + \frac{2!x(x+1)t^2}{(1+t)(1+4t)} + \frac{3!x(x+1)(x+2)t^3}{(1+t)(1+4t)(1+9t)} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{xt}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2(x+1)t}{1 - \frac{2(x+2)t}{1 - \frac{3(x+2)t}{1 - \frac{3(x+3)t}{1 - \ddots}}}}}}}} \\ \frac{1}{x^2 t} C(x; t) &= 1 + \frac{(x+1)t}{1+2t} + \frac{2!(x+1)(x+2)t^2}{(1+2t)(1+6t)} + \frac{3!(x+1)(x+2)(x+3)t^3}{(1+2t)(1+6t)(1+12t)} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{(x+1)t}{1 - \frac{(x+1)t}{1 - \frac{2(x+2)t}{1 - \frac{2(x+2)t}{1 - \frac{3(x+3)t}{1 - \frac{3(x+3)t}{1 - \ddots}}}}}}}} \end{aligned}$$

Quand $x = 1$, on retrouve les développements classiques des séries génératrices des nombres de Genocchi en fractions continues [19, 15, 21, 10]. Signalons enfin que Stieltjes [19] propose une autre extension de la fraction continue relative aux nombres de Genocchi, pour les polynômes qu'on appelle *polynômes d'Euler* dans les recueils de fonctions spéciales.

Bibliographie

- [1] D. Barsky, Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, Séminaire du groupe d'analyse ultramétrique, Paris, 34 (1981) 1–13.
- [2] L. Carlitz, A conjecture concerning Genocchi numbers, K. Norske Vidensk. Selsk. Sk. 9 (1972) 1–4.
- [3] L. Carlitz, Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomials, Discrete Math. 30 (1980) 211–225.
- [4] D. Dumont, Sur une conjecture de Gandhi concernant les nombres de Genocchi, Discrete Math. 1 (4) (1972) 321–327.
- [5] D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, Duke Math. J. 41(2) (1974) 305–318.
- [6] D. Dumont, Matrices d'Euler-Seidel, Actes de la 5-ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, preprint Strasbourg, 1982.
- [7] D. Dumont et D. Foata, Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, Bull. Soc. Math. France (104) (1976) 433–451.
- [8] D. Dumont et A. Randrianarivony, Sur une extension des nombres de Genocchi, à paraître.
- [9] D. Dumont et G. Viennot, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, Ann. Discrete Math. 6 (1980) 77–87.
- [10] D. Dumont et J. Zeng, A note on the Euler and Genocchi numbers, à paraître.
- [11] J.M. Gandhi, A conjectured representation of Genocchi numbers, Amer. Math. Monthly 77 (1970) 505–506.
- [12] Han Guo Niu, Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi, preprint, Strasbourg.
- [13] M.E.H. Ismail et D. Stewart, On Dumont's polynomials, Discrete Math. 41 (1982) 155–160.
- [14] G. Kreweras, The number of more or less regular permutations, Fibonacci Quart. 18 (1980) 226–229.
- [15] C. Preece, Theorems stated by Ramanujan (X), J. London Math. Soc. 6 (1931) 23–32.
- [16] J. Riordan et P.R. Stein, Proof of a conjecture on Genocchi numbers, Discrete Math. 5 (1973) 381–388.
- [17] D.P. Roselle, Permutations by number of rises and successions, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 8–16.
- [18] L. Seidel, Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsberichte der Münch. Akad., Math. Phys. Classe, 4 (1877) 157–187.
- [19] T.J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, XI, Ann. Faculté des Sciences de Toulouse, 9 (1895) 39–41.
- [20] V. Strehl, Alternating permutations and modified Gandhi polynomials, Discrete Math. 28 (1979) 89–100.
- [21] G. Viennot, Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi, Séminaire de Théorie des nombres, exposé no. 11, Publ. de l'Université de Bordeaux I, 1980.