



ELSEVIER

Discrete Mathematics 256 (2002) 743–758

DISCRETE
MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/disc

Nouvelles statistiques de partitions pour les q -nombres de Stirling de seconde espèce

Gérald Ksavrelof*, Jiang Zeng

Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard (Lyon 1), 69622 Villeurbanne Cedex, France

Received 2 October 2000; received in revised form 6 April 2001; accepted 28 May 2001

Abstract

Steingrímsson (Preprint, 1999) has recently introduced a partition analogue of Foata–Zeilberger’s *mak* statistic for permutations and conjectured that its generating function is equal to the classical q -Stirling numbers of second kind. In this paper, we prove a generalization of Steingrímsson’s Conjecture 12.

Résumé

Steingrímsson (Preprint, 1999) a récemment introduit un analogue en partitions de la statistique *mak* de Foata–Zeilberger pour les permutations et conjecturé que leur fonction génératrice est égale aux q -nombres de Stirling de seconde espèce. Dans cet article nous démontrons une généralisation de la Conjecture 12 de Steingrímsson. © 2002 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Keywords: Partition; q -Stirling numbers; Mahonian statistics

1. Introduction

Les q -nombres de Stirling de seconde espèce, notés $S_q(n, k)$, sont définis par la relation de récurrence:

$$S_q(n, k) = \begin{cases} q^{k-1} S_q(n-1, k-1) + [k]_q S_q(n-1, k) & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ \delta_{nk} & \text{si } n = 0 \text{ ou } k = 0, \end{cases} \quad (1)$$

* Corresponding author.

E-mail addresses: ksavrelo@desargues.univ-lyon1.fr (G. Ksavrelof), zeng@desargues.univ-lyon1.fr (J. Zeng).

où $[k]_q = 1 + q + \dots + q^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$. Carlitz [1] et Gould [7] ont étudié pour la première fois ces nombres sous la forme $\tilde{S}_q(n, k) = q^{-\binom{k}{2}} S_q(n, k)$. Dans les dernières années, beaucoup d'auteurs ont cherché des interprétations des q -nombres de Stirling $\tilde{S}_q(n, k)$ et $S_q(n, k)$ dans différents modèles tels que les *partitions*, *fonctions à croissance restreinte* [10–14], *placement de tours* [9,6], *0-1 tableaux* [8,2] et *juggling patterns* [3].

Une *partition* en k blocs de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ sera noté $\pi = B_1 - \dots - B_k$, où B_1, \dots, B_k sont les blocs classés par *ordre croissant* de leurs plus petits éléments. On note \mathcal{P}_n^k l'ensemble des *partitions* en k blocs de $[n]$. Etant donnée une partition π de $[n]$, on répartit les entiers de $[n]$ en quatre types de la manière suivante:

- un *ouvrant* est le plus petit élément d'un bloc de π ,
- un *fermant* est le plus grand élément d'un bloc de π ,
- un *passant* est un élément ni ouvrant ni fermant d'un bloc de π non réduit à un seul élément,
- un *singleton* est l'élément d'un bloc de π qui n'a qu'un seul élément.

L'ensemble des ouvrants, fermants, passants et singletons de π sera noté respectivement par $\mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{F}(\pi)$, $\mathcal{P}(\pi)$ et $\mathcal{S}(\pi)$. Il est évident que $\mathcal{S}(\pi) = \mathcal{O}(\pi) \cap \mathcal{F}(\pi)$.

Rappelons qu'un mot $w \in [k]^n$ est une *fonction à croissance restreinte* s'il satisfait les conditions suivantes:

$$w_1 = 1 \quad \text{et} \quad w_i \leq \max\{w_j : 1 \leq j < i\} + 1 \quad \text{pour tout } i \in [n].$$

A toute partition $\pi = B_1 - \dots - B_k \in \mathcal{P}_n^k$ on peut associer une *fonction à croissance restreinte* $w(\pi) = w_1 w_2 \dots w_n$ où w_i est l'indice du bloc de π contenant l'entier i pour $i \in [n]$.

Exemple. Si $\pi = 148-2-379-56$, alors $\mathcal{O}(\pi) = \{1, 2, 3, 5\}$, $\mathcal{F}(\pi) = \{8, 2, 9, 6\}$, $\mathcal{P}(\pi) = \{4, 7\}$ et $\mathcal{S}(\pi) = \{2\}$ et $w(\pi) = 123144313$.

Suivant Steingrímsson [11] on définit les huit statistiques coordonnées sur \mathcal{P}_n^k comme suit:

$$\text{ros}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{O}(\pi) \mid i > j, w_j > w_i\},$$

$$\text{rob}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{O}(\pi) \mid i < j, w_j > w_i\},$$

$$\text{rcs}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{F}(\pi) \mid i > j, w_j > w_i\},$$

$$\text{rcb}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{F}(\pi) \mid i < j, w_j > w_i\},$$

$$\text{los}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{O}(\pi) \mid i > j, w_j < w_i\},$$

$$\text{lob}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{O}(\pi) \mid i < j, w_j < w_i\},$$

$$\text{lcs}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{F}(\pi) \mid i > j, w_j < w_i\},$$

$$\text{lcb}_i(\pi) = \#\{j \in \mathcal{F}(\pi) \mid i < j, w_j < w_i\}.$$

On définit ensuite les huit statistiques ros , rob , rcs , rcb , lob , los , lcs et lcb comme la somme de leurs coordonnées, par exemple, $\text{ros}(\pi) = \sum_i \text{ros}_i(\pi)$.

Remarque. ros est l’abréviation en anglais pour “*right, opener, smaller*”, de même lcb est celle pour “*left, closer, bigger*”, etc (voir [11]). Certaines de ces statistiques ont été introduites dans la littérature sous différentes formes, comme les statistiques lb , ls , rb et rs de [13, section 2], les statistiques I^M et I^m de [9, section 4] et la statistique inv de [10, section 4]. Plus exactement, on a les relations suivantes:

$$\text{ros} = lb = I^M = inv, \quad \text{lcb} = rs,$$

$$\text{los} = ls = I^m, \quad \text{rcb} = rb.$$

D’autre part on voit facilement que la statistique $\text{lob}(\pi) \equiv 0$ si les blocs de π sont classés par ordre croissant de leurs plus petits éléments. Elle ne sera utile que si les blocs de π sont classés dans un ordre arbitraire.

Inspiré par la statistique mak de Foata et Zeilberger [5] sur les permutations, Steingrímsson [11] a introduit les analogues en partitions suivants:

Définition 1. Pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n^k$, on pose

$$\text{mak}(\pi) = \text{ros}(\pi) + \text{lcs}(\pi), \quad \text{lmak}'(\pi) = n(k - 1) - [\text{lcb}(\pi) + \text{rob}(\pi)],$$

$$\text{mak}'(\pi) = \text{lob}(\pi) + \text{rcb}(\pi), \quad \text{lmak}(\pi) = n(k - 1) - [\text{los}(\pi) + \text{rcs}(\pi)].$$

Donnons un exemple de calculs des statistiques précédemment définies.

Exemple. Soit $\pi = 1\ 4\ 8 - 2\ 9 - 3\ 7 - 5\ 6$, alors on a:

$\pi = 1\ 4\ 8 - 2\ 9 - 3\ 7 - 5\ 6$	$\pi = 1\ 4\ 8 - 2\ 9 - 3\ 7 - 5\ 6$
$\text{ros}_i : 0\ 2\ 3 \quad 0\ 2 \quad 0\ 1 \quad 0\ 0$	$\text{lcb}_i : 0\ 0\ 0 \quad 1\ 0 \quad 2\ 2 \quad 3\ 3$
$\text{lcs}_i : 0\ 0\ 0 \quad 0\ 1 \quad 0\ 0 \quad 0\ 0$	$\text{rob}_i : 3\ 1\ 0 \quad 2\ 0 \quad 1\ 0 \quad 0\ 0$
$\text{lob}_i : 0\ 0\ 0 \quad 0\ 0 \quad 0\ 0 \quad 0\ 0$	$\text{los}_i : 0\ 0\ 0 \quad 1\ 1 \quad 2\ 2 \quad 3\ 3$
$\text{rcb}_i : 3\ 3\ 1 \quad 2\ 0 \quad 1\ 0 \quad 0\ 0$	$\text{rcs}_i : 0\ 0\ 2 \quad 0\ 2 \quad 0\ 1 \quad 0\ 0$

On en déduit donc d’après la définition:

$$\text{mak}(\pi) = 8 + 1 = 9, \quad \text{lmak}'(\pi) = 27 - (11 + 7) = 9,$$

$$\text{mak}'(\pi) = 0 + 10 = 10, \quad \text{lmak}(\pi) = 27 - (12 + 5) = 10.$$

Les q -nombres de Stirling ont été obtenus pour la première fois comme fonction génératrice dans [9], en termes de statistiques I^M et I^m . Puis, quatre variantes de ces statistiques ont été introduites dans [13]. Celles-ci ont été ensuite étendues aux huit variantes dans [11], vraisemblablement épuisant toutes les possibilités d'exploiter l'indice d'inversion d'une partition. Toutes ces extensions ont été obtenues par modifications triviales de définitions; or, l'étude des distributions conjointes, comme dans [13], ou celle des statistiques mélangées, comme dans [11], montre que ces extensions méritent d'être étudiées.

On pourrait distinguer deux types de statistiques sur \mathcal{P}_n^k : celles dont la vérification de la récurrence (1) est facile et celles dont la vérification de la récurrence (1) est difficile [13]. Par exemple, il est facile (voir [9]) de vérifier que $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{los}(\pi)}$ satisfait (1). D'autre part, il existe des statistiques ayant pour fonction génératrice $S_q(n, k)$, mais la récurrence (1) s'avère plus difficile à vérifier (voir [13]). Dans cet article nous étudions quelques nouvelles statistiques du dernier type sur \mathcal{P}_n^k ayant pour fonction génératrice $S_q(n, k)$. En effet, cet article a été motivé par la conjecture suivante de Steingrímsson [11, Conjecture 12]:

Conjecture 1 (Steingrímsson [11]). Les quatre statistiques mak , lmak , mak' et lmak' ont pour fonction génératrice sur \mathcal{P}_n^k les q -nombres de Stirling $S_q(n, k)$, c'est-à-dire,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{mak}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{mak}'(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{lmak}'(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{lmak}(\pi)} = S_q(n, k).$$

Il se trouve que la statistique mak' est égale à la statistique rb de Wachs et White [13], qui avaient établis, parmi d'autres, le résultat suivant:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{mak}'(\pi)} = S_q(n, k). \quad (2)$$

En s'appuyant sur le résultat (2) de Wachs et White, on pourrait démontrer la conjecture de Steingrímsson ci-dessus à partir des deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Il existe une involution φ sur \mathcal{P}_n^k telle que pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n^k$, on a $\text{mak}(\pi) = \text{mak}'(\varphi(\pi))$.

Théorème 2. Pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n^k$ on a

$$\text{mak}(\pi) = \text{lmak}'(\pi), \quad \text{mak}'(\pi) = \text{lmak}(\pi).$$

En fait, l'approche que nous proposons dans cet article est indépendante du résultat (2) de Wachs et White et a permis de trouver une nouvelle statistique mak_l généralisant mak .

Définition 2. Soit $\pi = B_1 - \dots - B_k \in \mathcal{P}_n^k$ et $w(\pi) = w_1 \dots w_n$. Pour tout $b \in [n]$ on pose $\text{reb}(b, \pi) = \#\{a \mid w_a > w_b \text{ et } a > b\}$. Pour tout $l \in [k]$ on désigne respectivement par $p(B_l)$

et $g(B_l)$ le plus petit et le plus grand élément de B_l , et on définit

$$\text{mak}_l(\pi) = \text{mak}(\pi) - \text{reb}(g(B_l), \pi) + k - l.$$

On remarque que lorsque $l = k$ on retrouve la mak ordinaire, i.e. $\text{mak}_k = \text{mak}$.

Exemple. Soit $\pi = 148 - 2 - 379 - 56$, alors on a $g(B_1) = 8$, $g(B_2) = 2$, $g(B_3) = 9$ et $g(B_4) = 6$. Ainsi:

$$\text{reb}(g(B_1), \pi) = 1 \Rightarrow \text{mak}_1(\pi) = 11,$$

$$\text{reb}(g(B_2), \pi) = 5 \Rightarrow \text{mak}_2(\pi) = 6,$$

$$\text{reb}(g(B_3), \pi) = 0 \Rightarrow \text{mak}_3(\pi) = 10,$$

$$\text{reb}(g(B_4), \pi) = 0 \Rightarrow \text{mak}_4(\pi) = 9.$$

Le théorème suivant généralise la conjecture de Steingrímsson sur la statistique mak.

Théorème 3. Pour $1 \leq l \leq k$, on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} q^{\text{mak}_l(\pi)} = S_q(n, k).$$

Nous donnons les démonstrations de ces trois théorèmes respectivement dans les trois sections suivantes et terminons l'article avec quelques remarques sur les problèmes ouverts.

2. Preuve du théorème 1

Nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires. Pour tout ensemble fini d'entiers B et entier i , on note $B(\leq i)$ la restriction de B sur $[i]$, qui est soit *complet*, si l'ensemble B est inclus dans $[i]$, soit *incomplet*, si une partie non vide de B est dans $[i]$ et l'autre partie non vide dans $[n] \setminus [i]$, soit *vide* si $B \cap [i] = \emptyset$.

Définition 3. Soit $\pi = B_1 - B_2 - \dots - B_k$ une partition de \mathcal{P}_n^k et $T_0 = \emptyset$. Pour $i = 1, \dots, n$, on définit la i^e trace de π comme la partition T_i de $[i]$:

$$T_i = B_1(\leq i) - B_2(\leq i) - \dots - B_k(\leq i).$$

On note le nombre de blocs incomplets dans T_{i-1} par $l_i(\pi)$, et le nombre de blocs incomplets situés à gauche du bloc contenant i dans T_i par $\gamma_i(\pi) - 1$.

Exemple. Si $\pi = 1\ 4\ 8 - 2 - 3\ 7\ 9 - 5\ 6$, alors les traces, $l_i(\pi)$ et $\gamma_i(\pi)$ sont donnés par:

$$T_1 = 1 \cdot \quad \quad \quad l_1 = 0 \quad \gamma_1 = 1$$

$$T_2 = 1 \cdot -2 \quad \quad \quad l_2 = 1 \quad \gamma_2 = 2$$

$$T_3 = 1 \cdot -2 - 3 \cdot \quad \quad \quad l_3 = 1 \quad \gamma_3 = 2$$

$$T_4 = 1\ 4 \cdot -2 - 3 \cdot \quad \quad \quad l_4 = 2 \quad \gamma_4 = 1$$

$$T_5 = 1\ 4 \cdot -2 - 3 \cdot -5 \cdot \quad \quad \quad l_5 = 2 \quad \gamma_5 = 3$$

$$T_6 = 1\ 4 \cdot -2 - 3 \cdot -5\ 6 \quad \quad \quad l_6 = 3 \quad \gamma_6 = 3$$

$$T_7 = 1\ 4 \cdot -2 - 3\ 7 \cdot -5\ 6 \quad \quad \quad l_7 = 2 \quad \gamma_7 = 2$$

$$T_8 = 1\ 4\ 8 - 2 - 3\ 7 \cdot -5\ 6 \quad \quad \quad l_8 = 2 \quad \gamma_8 = 1$$

$$T_9 = 1\ 4\ 8 - 2 - 3\ 7\ 9 - 5\ 6 \quad \quad \quad l_9 = 1 \quad \gamma_9 = 1$$

où on ajoute un *point* dans chaque *bloc incomplet*.

Il est clair qu'une partition est entièrement déterminée par ses traces successives T_1, T_2, \dots, T_n ou par la suite $(l_1, \gamma_1), \dots, (l_n, \gamma_n)$. D'autre part, pour tout $i \in [n]$ on voit que

$$k = \begin{cases} l_i + \#\{a \in \mathcal{O} \mid a > i\} + \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\}, & \text{si } i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{F}_s, \\ 1 + l_i + \#\{a \in \mathcal{O} \mid a > i\} + \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\}, & \text{si } i \in \mathcal{O}_s \cup \mathcal{L}. \end{cases} \quad (3)$$

D'où on tire en sommant sur tous les i :

$$nk = \#\mathcal{O} + \sum_{i=1}^n (l_i + \#\{a \in \mathcal{O} \mid a > i\} + \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\}). \quad (4)$$

Lemme 1. Soit $\pi \in \mathcal{P}_n^k$ une partition fixée, on pose $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}(\pi) \setminus \mathcal{L}(\pi)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\pi)$, $l_i = l_i(\pi)$ et $\gamma_i = \gamma_i(\pi)$. Alors on a les identités suivantes:

$$\text{mak}(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}} (l_i - \gamma_i) + \sum_{i=1}^n \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\}, \quad (5)$$

$$\text{mak}'(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}} (k - \gamma_i) + \sum_{i \in \mathcal{O}} (k - 1 - l_i) - \sum_{i=1}^n \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\}, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{F}_s} l_i = \sum_{i \in \mathcal{O}_s} (l_i + 1). \quad (7)$$

Preuve. Pour tout $i \in [n]$, comme $\text{lcs}_i(\pi)$ est le nombre de blocs complets à gauche du bloc contenant i dans la i^e -trace de π , on a $\text{lcs}_i(\pi) = \#\{a \in \mathcal{F}(\pi) \mid a < i\}$; d'autre part, $\text{ros}_i(\pi)$ est le nombre de blocs (complets ou incomplets) à droite du bloc contenant i dans la i^e -trace de π , ainsi $\text{ros}_i(\pi) = l_i - \gamma_i$ si $i \in \mathcal{F}_s \cup \mathcal{P}$ et $\text{ros}_i(\pi) = 0$ si $i \in \mathcal{O}$.

D'où la première égalité. De même, comme $\text{rcb}_i(\pi)$ comptent non seulement les blocs incomplets à droite du bloc contenant i dans T_i , c'est à dire $l_i - \gamma_i$ si $i \in \mathcal{F}_s \cup \mathcal{P}$ et 0 sinon, mais aussi les blocs qui ne sont pas encore créés, soit

$$k - l_i - \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\} \quad \text{si } i \in \mathcal{F}_s \cup \mathcal{P},$$

$$k - l_i - \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\} - 1 \quad \text{si } i \in \mathcal{O}.$$

En sommant sur i on obtient la seconde égalité. Enfin, on remarque qu'il y a autant de fermants que d'ouvrants dans π , et $\forall i \in [n]$, $l_i \geq 0$ et $l_{i+1} = l_i + 1$ (resp. $l_{i+1} = l_i - 1$) si $i \in \mathcal{O}_s$ (resp. si $i \in \mathcal{F}_s$). On va construire une bijection de \mathcal{O}_s dans \mathcal{F}_s telle que si $a \mapsto a'$, alors $l_a + 1 = l_{a'}$. Ce qui démontre clairement la troisième égalité. En effet, soit $\mathcal{O}_s = \{a_1, \dots, a_r\}$ tel que $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. Comme $l_{a_1} = 0$ et $l_g = 1$, où g est le plus grand fermant de π , on définit a'_1 comme le plus petit fermant tel que $l_{a'_1} + 1 = l_{a_1}$. Supposons ainsi définis les $i - 1$ fermants a'_1, \dots, a'_{i-1} associés avec les i premiers ouvrants a_1, \dots, a_{i-1} respectivement. A a_i on associe le plus petit fermant, soit a'_i , dans $\mathcal{F}_s \setminus \{a'_1, \dots, a'_{i-1}\}$ tel que $l_{a'_i} + 1 = l_{a_i}$. \square

Grâce à la notion de trace, on est maintenant en mesure de décrire une involution $\varphi : \mathcal{P}_n^k \rightarrow \mathcal{P}_n^k$ définie par l'algorithme suivant:

1. Etant donnée une partition π de $[n]$, on partage l'ensemble $[n]$ en quatre parties $\mathcal{S}(\pi)$, $\mathcal{O}_s(\pi) = \mathcal{O}(\pi) \setminus \mathcal{S}(\pi)$, $\mathcal{F}_s(\pi) = \mathcal{F}(\pi) \setminus \mathcal{S}(\pi)$ et $\mathcal{P}(\pi)$, et on calcule les γ_i pour tout $i \in [n]$. Notons f (resp. p) la suite croissante des éléments de $\mathcal{F}_s(\pi)$ (resp. $\mathcal{P}(\pi)$). On forme alors les deux matrices:

$$\begin{pmatrix} f \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_r \\ \gamma_{f_1} & \gamma_{f_2} & \dots & \gamma_{f_r} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ \gamma_{p_1} & \gamma_{p_2} & \dots & \gamma_{p_s} \end{pmatrix}.$$

2. On commence par définir les quatre ensembles correspondants de π' :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \{n + 1 - i \mid i \in \mathcal{S}(\pi)\}, & \mathcal{O}'_s &= \{n + 1 - i \mid i \in \mathcal{F}_s(\pi)\}, \\ \mathcal{F}'_s &= \{n + 1 - i \mid i \in \mathcal{O}_s(\pi)\}, & \mathcal{P}' &= \{n + 1 - i \mid i \in \mathcal{P}(\pi)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

On note que

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}'_s \cup \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}'_s \cup \mathcal{S}'.$$

Soient f' et p' les suites croissantes des éléments de \mathcal{F}'_s et \mathcal{P}' , formons les deux matrices:

$$\begin{pmatrix} f' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & \dots & f'_r \\ \gamma_{f'_1} & \gamma_{f'_2} & \dots & \gamma_{f'_r} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 & \dots & p'_s \\ \gamma_{p'_s} & \gamma_{p'_{s-1}} & \dots & \gamma_{p'_1} \end{pmatrix}.$$

3. On commence par construire une partition π_0 de \mathcal{O}' , dont les blocs sont tous des singletons. Un singleton $\{i\}$ est dit complet (resp. incomplet) si $i \in \mathcal{S}'$ (resp. sinon).

Soit

$$\pi_0 = B_1 - B_2 - \cdots - B_k.$$

Supposons ensuite que x_1, x_2, \dots, x_{n-k} est le réarrangement croissant des éléments de $\mathcal{F}'_s \cup \mathcal{P}'$. Pour $j = 1, \dots, n-k$ on construit π_j en insérant x_j dans l'un des blocs de π_{j-1} de sorte que $\gamma'_{x_j} = \gamma_{x_j}(\pi_j)$. Rappelons qu'un bloc de π_j est considéré complet s'il débute avec un élément de \mathcal{O}' et termine avec un élément de \mathcal{F}' .

4. Définissons $\varphi(\pi) = \pi' = \pi_{n-k}$, alors $\mathcal{S}(\pi') = \mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_s(\pi') = \mathcal{O}'_s$, $\mathcal{F}_s(\pi') = \mathcal{F}'_s$, $\mathcal{P}(\pi') = \mathcal{P}'$.

On vérifie que φ est une involution sur \mathcal{P}_n^k telle que $\mathcal{F}_s(\varphi(\pi)) = \{n+1-i \mid i \in \mathcal{O}_s(\pi)\}$.

Exemple. Prenons la partition $\pi = 148 - 2 - 379 - 56$, alors

$$\mathcal{O}_s = \{1, 3, 5\}, \quad \mathcal{F}_s = \{8, 9, 6\}, \quad \mathcal{P} = \{4, 7\}, \quad \mathcal{S} = \{2\}.$$

On en déduit donc $\mathcal{F}'_s = \{9, 7, 5\}$, $\mathcal{O}'_s = \{2, 1, 4\}$, $\mathcal{P}' = \{6, 3\}$ et $\mathcal{S}' = \{8\}$. Ainsi on a

$$\begin{pmatrix} f \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et puis

$$\begin{pmatrix} f' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient d'abord les $k=4$ blocs (complets ou incomplets) formés des éléments de \mathcal{O}' :

$$\pi_0 = 1 \cdot -2 \cdot -4 \cdot -8.$$

On insère successivement les éléments i de $\mathcal{F}'_s \cup \mathcal{P}'$ en tenant compte de γ_i et on obtient

$$\pi_1 = 1 \cdot -2 \ 3 \cdot -4 \cdot -8$$

$$\pi_2 = 1 \cdot -2 \ 3 \cdot -4 \ 5 - 8$$

$$\pi_3 = 1 \ 6 \cdot -2 \ 3 \cdot -4 \ 5 - 8$$

$$\pi_4 = 1 \ 6 \ 7 - 2 \ 3 \cdot -4 \ 5 - 8$$

$$\pi_5 = 1 \ 6 \ 7 - 2 \ 3 \ 9 - 4 \ 5 - 8.$$

D'où $\pi' = \pi_5 = 1 \ 6 \ 7 - 2 \ 3 \ 9 - 4 \ 5 - 8$. On vérifie que $(\pi')' = \pi$.

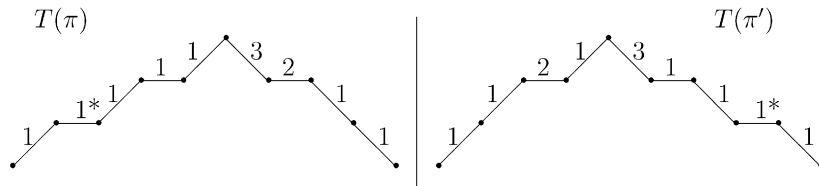
Remarque. On pourrait décrire l’involution φ dans le modèle des chemins de Motzkin valués [4]. En effet à chaque partition $\pi \in \mathcal{P}_n^k$, on peut associer un chemin $T(\pi)$ définie comme suit:

- A chaque élément de \mathcal{O}_s (resp. \mathcal{S}), on associe un pas nord-est (resp. est) étiqueté 1 (resp. 1^*).
- A chaque élément $i \in \mathcal{F}_s$ (resp. \mathcal{P}), on associe un pas sud-est (resp. est) étiqueté γ_i .

La correspondance $\pi \rightarrow \varphi(\pi) = \pi'$ se présente alors comme une symétrie par rapport à l’axe des ordonnées des chemins correspondants où l’étiquetage de $T(\pi')$ est le suivant:

- Les pas “est” gardent la même valeur.
- Les pas “nord-est” reste étiquetés 1.
- On étiquette les pas “sud-est” en reprenant les étiquettes des pas “sud-est” de $T(\pi)$ dans le même ordre.

Exemple. Soit $\pi = 148 - 2 - 379 - 56$ alors:



A partir du chemin $T(\pi)$ on retrouve alors la partition $\varphi(\pi) = 167 - 239 - 45 - 8$.

Reste à montrer que $\text{mak}'(\varphi(\pi)) = \text{mak}(\pi)$, ce qui, en vertu du lemme 1, équivaut à :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}} (l_i - \gamma_i) + \sum_{i=1}^n \#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{P}'} (k - \gamma'_i) + \sum_{i \in \mathcal{O}'} (k - l'_i - 1) - \sum_{i=1}^n \#\{a \in \mathcal{F}' \mid a < i\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Or la construction de $\varphi(\pi)$ exige que les suites $(\gamma_i)_{i \in \mathcal{F}'_s}$ et $(\gamma_i)_{i \in \mathcal{O}'_s}$ soient respectivement des réarrangements de $(\gamma_i)_{i \in \mathcal{F}_s}$ et $(\gamma_i)_{i \in \mathcal{O}_s}$. Ainsi, compte tenu des définitions (8) de \mathcal{F}' , \mathcal{O}' , \mathcal{P}' , \mathcal{S}' , \mathcal{F}'_s et \mathcal{O}'_s , l’identité (9) peut s’écrire comme suit:

$$\sum_{i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}} l_i + \sum_{i=1}^n (\#\{a \in \mathcal{F} \mid a < i\} + \#\{a \in \mathcal{O} \mid a > i\}) = nk - \sum_{i \in \mathcal{O}'} (l'_i + 1).$$

En appliquant l’équation (4), on voit que l’égalité ci-dessus équivaut à :

$$\sum_{i \in \mathcal{O}} (l_i + 1) = \sum_{i \in \mathcal{O}'} (l'_i + 1). \tag{10}$$

Remarquant que $j \in \mathcal{O}'$ si et seulement si $\bar{j} = n + 1 - j \in \bar{\mathcal{F}}$, on déduit de (3) que

$$\begin{aligned} l'_i &= k - 1 - \#\{a \in \mathcal{O}' \mid a > i\} - \#\{a \in \bar{\mathcal{F}}' \mid a < i\} \\ &= k - 1 - \#\{\bar{b} \in \bar{\mathcal{F}} \mid \bar{b} < \bar{i}\} - \#\{\bar{b} \in \mathcal{O} \mid \bar{b} > \bar{i}\}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $l'_i = l_{\bar{i}}$ si $i \in \mathcal{S}'$ et $l'_i = l_{\bar{i}} + 1$ si $i \in F'_s$. Il en résulte que l'identité (10) équivaut à (7). Ce qu'il fallait démontrer.

3. Preuve du théorème 2

On commence par quelques définitions et notations. Pour être cohérent avec les notations de Steingrímsson [11], on utilise respectivement les abréviations de *right element smaller*, *right element bigger* et *left element bigger* pour les statistiques *res*, *reb* et *leb*.

Définition 4. Soit $\pi = B_1 \cdots B_k$ une partition de \mathcal{P}_n^k et $b \in B_j$ fixé. On définit d'abord, pour tout $i > j$, $\text{res}(b, B_i) = \#\{a \in B_i \mid b > a\}$, $\text{reb}(b, B_i) = \#\{a \in B_i \mid b < a\}$, et pour tout $i < j$, $\text{leb}(b, B_i) = \#\{a \in B_i \mid b < a\}$; et puis

$$\text{res}(b, \pi) = \sum_{i>j} \text{res}(b, B_i), \quad \text{reb}(b, \pi) = \sum_{i>j} \text{reb}(b, B_i), \quad \text{leb}(b, \pi) = \sum_{i<j} \text{leb}(b, B_i).$$

Enfin on note b_j le cardinal de B_j pour tout $j \in [k]$ et pose

$$\text{leb}(\mathcal{O}, \pi) = \sum_{b \in \mathcal{O}(\pi)} \text{leb}(b, \pi), \quad \text{res}(\bar{\mathcal{F}}, \pi) = \sum_{b \in \bar{\mathcal{F}}(\pi)} \text{res}(b, \pi).$$

Proposition 1. Pour toute partition $\pi \in \mathcal{P}_n^k$, on a

$$\text{mak}(\pi) = \text{lmak}'(\pi) = \text{los}(\pi) - \text{res}(\bar{\mathcal{F}}, \pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi),$$

$$\text{mak}'(\pi) = \text{lmak}(\pi) = n(k-1) - \text{los}(\pi) - \text{leb}(\bar{\mathcal{F}}, \pi).$$

Preuve. Soit $\pi = B_1 \cdots B_k \in \mathcal{P}_n^k$, en utilisant les notations de la définition 4, on peut réécrire les statistiques $\text{lcs}(\pi)$ et $\text{ros}(\pi)$ de la façon suivante:

$$\text{lcs}(\pi) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i} (b_j - \text{res}(g(B_i), B_j)),$$

$$\text{ros}(\pi) = \sum_{i=2}^k \sum_{j<i} \text{leb}(p(B_i), B_j).$$

Ainsi, la statistique $\text{mak}(\pi)$ peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \text{mak}(\pi) &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i} (b_j - \text{res}(g(B_i), B_j)) + \sum_{i=2}^k \sum_{j<i} \text{leb}(p(B_i), B_j) \\ &= \sum_{j=2}^k (j-1)b_j - \sum_{b \in \mathcal{F}(\pi)} \text{res}(b, \pi) + \sum_{b \in \mathcal{O}(\pi)} \text{leb}(b, \pi) \\ &= \text{los}(\pi) - \text{res}(\mathcal{F}, \pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi). \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \text{lcb}(\pi) &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i} \text{res}(g(B_i), B_j) = \text{res}(\mathcal{F}, \pi), \\ \text{rob}(\pi) &= \sum_{i=2}^k \sum_{j<i} [b_j - \text{leb}(p(B_i), B_j)] = \sum_{j=1}^k (k-j)b_j - \text{leb}(\mathcal{O}, \pi). \end{aligned}$$

Et donc la statistique lmak' peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \text{lmak}'(\pi) &= \left[n(k-1) - \sum_{i=1}^k (k-i)b_i \right] - \text{res}(\mathcal{F}, \pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi) \\ &= \left[\sum_{i=1}^k (k-1)b_i - \sum_{i=1}^k (k-i)b_i \right] - \text{res}(\mathcal{F}, \pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi) \\ &= \text{los}(\pi) - \text{res}(\mathcal{F}, \pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi). \end{aligned}$$

D'où la première identité. La seconde identité peut être vérifiée de façon analogue. \square

4. Preuve du théorème 3

Dans tout ce qui suit on suppose que \mathcal{O} est un sous-ensemble fixé de $[n]$ à $k+1$ éléments avec $1 \in \mathcal{O}$. Soit $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$ l'ensemble des partitions de \mathcal{P}_n^{k+1} ayant pour l'ensemble des ouvrants \mathcal{O} .

Lemme 2. *La statistique $\text{los} + \text{leb}$ est constante sur $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$. Plus précisément, pour toute partition $\pi \in \mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$, on a*

$$\text{los}(\pi) + \text{leb}(\mathcal{O}, \pi) = \sum_{x \in \mathcal{O}, x \neq 1} (n-x+1).$$

Preuve. Soit $\pi_0 = B_1 - \dots - B_{k+1}$ la partition de $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$, telle que tout non-ouvrant a soit le plus à droite possible, c'est-à-dire, $a \in B_j$ tel que $p(B_j) < a$ et $a < p(B_{j+1})$. Alors toutes les autres partitions π de $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$ s'obtiennent à partir de π_0 par déplacements successifs des non-ouvrants vers la gauche. Or lorsque l'on déplace une lettre vers la gauche (de i blocs), $\text{los}(\pi_0)$ diminue de i , et $\text{leb}(\mathcal{O}, \pi_0)$ augmente de i . Ainsi on montre que $\text{los} + \text{leb}$ est constant sur l'ensemble $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$. Il suffit donc de calculer cette statistique pour π_0 . Clairement $\text{leb}(\mathcal{O}, \pi_0) = 0$. Si (x_1, \dots, x_{k+1}) est le réarrangement croissant des éléments de \mathcal{O} , alors pour tout $x_i \in \mathcal{O}$ le nombre d'éléments qui sont plus grand que x_i et dans un bloc à droite de B_i est $n - x_{i+1} + 1$ pour $i = 1, \dots, k$. D'où le résultat. \square

Pour tout $i \in [k + 1]$ et $\pi \in \mathcal{P}_n^{k+1}$ on pose

$$\text{stat}_i(\pi) = k - \text{res}(\overline{\mathcal{F}}, \pi) - \text{reb}(g(B_i), \pi). \quad (11)$$

Lemme 3. Pour tout $i \in [k]$, il existe une bijection φ_i sur $\mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$ telle que:

$$\text{stat}_i(\pi) = \text{stat}_{i+1}(\varphi_i(\pi)) - 1. \quad (12)$$

Preuve. Soit $\pi = B_1 - \dots - B_{k+1} \in \mathcal{P}_n^{k+1}(\mathcal{O})$. On définit $\pi' = \varphi_i(\pi) = B'_1 - \dots - B'_{k+1}$ comme suit: $B'_j = B_j$ pour tout $j \neq i, i + 1$,

$$B'_i = \begin{cases} B_i \setminus \{a \in B_i \mid a > g(B_{i+1})\} \cup \{g(B_{i+1})\} & \text{si } b_{i+1} > 1, \\ B_i \setminus \{a \in B_i \mid a > g(B_{i+1})\} & \text{si } b_{i+1} = 1, \end{cases}$$

et

$$B'_{i+1} = \begin{cases} B_{i+1} \setminus \{g(B_{i+1})\} \cup \{a \in B_i \mid a > g(B_{i+1})\} & \text{si } b_{i+1} > 1, \\ B_{i+1} \cup \{a \in B_i \mid a > g(B_{i+1})\} & \text{si } b_{i+1} = 1. \end{cases}$$

On peut construire de manière analogue l'application inverse φ_i^{-1} . Donc φ_i est une bijection. Il reste à vérifier l'équation (12). On distingue trois cas suivants:

1. Si $b_{i+1} = 1$ et $g(B_i) < g(B_{i+1})$, alors $\pi' = \pi$.
2. Si $b_{i+1} = 1$ et $g(B_i) > g(B_{i+1})$ (et donc $b_i > 1$), alors il est évident que $\text{res}(\overline{\mathcal{F}}, \pi') = \text{res}(\overline{\mathcal{F}}, \pi) - 1$, et $\text{reb}(g(B'_i), \pi') = \text{reb}(g(B_i), \pi)$.
3. Si $b_{i+1} > 1$, on a $\text{reb}(g(B'_{i+1}), \pi') = b_{i+2} + \dots + b_{k+1} - \text{res}(g(B'_{i+1}), \pi')$, et $\text{res}(\overline{\mathcal{F}}, \pi') = \text{res}(\overline{\mathcal{F}}, \pi) - \text{res}(g(B_i), \pi) + b_{i+1} - 1 + \text{res}(g(B'_{i+1}), \pi')$.

Il est clair que l'égalité (12) a lieu dans les deux premiers cas; pour le dernier cas, l'égalité (12) découle du fait que $\text{res}(g(B_i), \pi) + \text{reb}(g(B_i), \pi) = b_{i+1} + \dots + b_{k+1}$. \square

Exemple. Prenons $i = 3$, $k = 3$, $n = 9$, $\mathcal{O} = \{1, 2, 3, 5\}$ et fixons $B_1 = \{1, 4, 8\}$ et $B_2 = \{2\}$. Posons $\pi_0 = 148 - 2 - 3 - 5679$ et $\pi_j = \varphi_i(\pi_{j-1})$ pour $j \geq 1$, alors l'application

de φ_i donne successivement:

partition	$ stat_{i+1} - 1 $	$stat_i$
$\pi_0 = 148 - 2 - 3 - 5679$	-3	-6
$\pi_1 = 148 - 2 - 39 - 567$	-6	-5
$\pi_2 = 148 - 2 - 37 - 569$	-5	-5
$\pi_3 = 148 - 2 - 379 - 56$	-5	-4
$\pi_4 = 148 - 2 - 36 - 579$	-4	-5
$\pi_5 = 148 - 2 - 369 - 57$	-5	-4
$\pi_6 = 148 - 2 - 367 - 59$	-4	-4
$\pi_7 = 148 - 2 - 3679 - 5$	-4	-3

On constate que $\pi_{j+8} = \pi_j$ pour $j \geq 0$.

Lemme 4. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a

$$\sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi)+k-\text{reb}(g(B_{i+1}),\pi)} = q^i \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi)}. \tag{13}$$

Preuve. On montre d’abord par récurrence décroissante sur i l’identité suivante:

$$q^i \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{-\text{res}(\mathcal{F},\pi)} = \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{stat}_{i+1}(\pi)}. \tag{14}$$

Pour $i = k$ le résultat est vrai car $\text{reb}(g(B_{i+1})) = 0$. Supposons le résultat vrai à l’ordre i , alors

$$q^{i-1} \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{-\text{res}(\mathcal{F},\pi)} = \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{stat}_{i+1}(\pi)-1}.$$

Or le lemme 2 implique

$$\sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{stat}_{i+1}(\pi)-1} = \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{stat}_i(\pi)}.$$

Ce qui nous permet de conclure. Multipliant maintenant les deux membres de (14) par $q^{\sum_{x \in \mathcal{O}, x \neq 1} (n-x+1)}$, on déduit du lemme 4:

$$q^i \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{leb}(\mathcal{O},\pi)+\text{los}(\pi)-\text{res}(\mathcal{F},\pi)} = \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}(\mathcal{O})} q^{\text{stat}_{i+1}(\pi)+\text{leb}(\mathcal{O},\pi)+\text{los}(\pi)}.$$

Compte tenu de (11) et la proposition 1, on obtient (13) en sommant sur tous les ouvrants \mathcal{O} possibles. \square

On est maintenant en mesure de démontrer que la fonction génératrice de mak_l sur \mathcal{P}_n^k vérifie la relation de récurrence (1). On démontre d’abord ce résultat pour mak sur \mathcal{P}_n^k . Il est clair que c’est vrai pour $n = 1$. Etant donnée une partition $\pi \in \mathcal{P}_n^{k+1}$, on note

π' la partition obtenue en supprimant n . On distingue alors deux cas selon que n est un singleton ou non.

1. n est un singleton. Alors $\pi' \in P_{n-1}^k$ et on vérifie sans peine que

$$\text{los}(\pi) = \text{los}(\pi') + k,$$

$$\text{leb}(\mathcal{O}, \pi) = \text{leb}(\mathcal{O}, \pi'),$$

$$\text{res}(\mathcal{F}, \pi) = \text{res}(\mathcal{F}, \pi').$$

Ainsi $\text{mak}(\pi) = \text{mak}(\pi') + k$. D'où on déduit la fonction génératrice correspondante:

$$q^k \sum_{\pi' \in \mathcal{P}_{n-1}^k} q^{\text{mak}(\pi')}.$$

2. n n'est pas un singleton. Alors $\pi' \in P_{n-1}^{k+1}$. Supposons que n soit dans le $i^{\text{ème}}$ bloc de π . Alors

$$\text{los}(\pi) = \text{los}(\pi') + i - 1,$$

$$\text{leb}(\mathcal{O}, \pi) = \text{leb}(\mathcal{O}, \pi') + k + 1 - i,$$

$$\text{res}(\mathcal{F}, \pi) = \text{res}(\mathcal{F}, \pi') - \text{res}(g(B_i), \pi) + b_{i+1} + \cdots + b_{k+1}.$$

Ainsi, en vertu de la proposition 1, on a

$$\text{mak}(\pi) = \text{mak}(\pi') + k - \text{reb}(g(B_i), \pi).$$

On en déduit donc, d'après le lemme 4, la fonction génératrice correspondante:

$$\sum_{i=0}^k \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi) + k - \text{reb}(g(B_{i+1}), \pi)} = [k]_q \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi)}.$$

En récapitulant les deux cas précédents, on a:

$$\sum_{\pi \in P_n^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi)} = q^k \sum_{\pi \in P_{n-1}^k} q^{\text{mak}(\pi)} + [k]_q \sum_{\pi \in P_{n-1}^{k+1}} q^{\text{mak}(\pi)}.$$

Ce qui est exactement la relation de récurrence (1) pour les q -nombres de Stirling $S_q(n, k)$. Donc la fonction génératrice de mak sur \mathcal{P}_n^k est $S_q(n, k)$.

Enfin, pour tout $l \in [k]$, l'équation (13) équivaut à:

$$\sum_{\pi \in P_n^k} q^{\text{mak}(\pi)} = \sum_{\pi \in P_n^k} q^{k-l + \text{mak}(\pi) - \text{reb}(g(B_l), \pi)}.$$

Ce qui montre que mak et mak_l sont équidistribuées sur \mathcal{P}_n^k .

5. Remarques sur les partitions ordonnées

Une k -partition ordonnée de $[n]$ est une suite (B_1, B_2, \dots, B_k) de k sous-ensembles de $[n]$ telle que $\pi = B_{\sigma(1)} - B_{\sigma(2)} - \dots - B_{\sigma(k)}$ soit une partition de \mathcal{P}_n^k pour une permutation σ de $[k]$. Notons \mathcal{OP}_n^k l'ensemble des k -partitions ordonnées de $[n]$. Il est évident que le cardinal de \mathcal{OP}_n^k est $k!S_1(n, k)$. Il s'agit de trouver des statistiques Euler-mahoniennes sur \mathcal{OP}_n^k , i.e., leurs fonctions génératrices sur \mathcal{OP}_n^k sont égales à $[k]_q!S_q(n, k)$. Certaines de ces statistiques peuvent être obtenues à partir d'un résultat de Wachs [12]. Steingrímsson [11] en a proposé d'autres.

Définition 5. Soit $\pi = B_1 - \dots - B_k \in \mathcal{OP}_n^k$, on définit un ordre partiel sur les blocs comme suit: $B_i > B_j$ si toutes les lettres de B_i sont plus grandes que celles de B_j . On dit que i est un indice de descente si $B_i > B_{i+1}$. On définit alors $\text{bmaj}(\pi)$ comme la somme de tous les indices de descentes de π ; et $\text{binv}(\pi)$ comme le nombre de couples (i, j) tel que $i < j$ et $B_i > B_j$.

Steingrímsson [11, Conjecture 13] a conjecturé que si l'on ajoute à bmaj ou binv , l'une des statistiques de la définition 1, on obtient une statistique Euler-mahonienne, c'est à dire:

Conjecture 2 (Steingrímsson). Les statistiques suivantes sont Euler-mahoniennes:

$$\begin{array}{cccc} \text{mak} + \text{bmaj}, & \text{mak}' + \text{bmaj}, & \text{lmak}' + \text{bmaj}, & \text{lmak} + \text{bmaj}, \\ \text{mak} + \text{binv}, & \text{mak}' + \text{binv}, & \text{lmak}' + \text{binv}, & \text{lmak} + \text{binv}. \end{array}$$

On remarque que la démonstration de la proposition 1 s'étend *mutatis mutandis* au cas des partitions de OP_n^k , on peut alors réduire cette conjecture de moitié, i.e., dans la conjecture ci-dessus, il n'y a que quatre statistiques distinctes. Plus précisément on a le résultat suivant:

Proposition 2. On a les égalités suivantes:

$$\begin{array}{l} \text{mak} + \text{bmaj} = \text{lmak}' + \text{bmaj}, \quad \text{mak}' + \text{bmaj} = \text{lmak} + \text{bmaj}, \\ \text{mak} + \text{binv} = \text{lmak}' + \text{binv}, \quad \text{mak}' + \text{binv} = \text{lmak} + \text{binv}. \end{array}$$

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier les deux arbitres anonymes pour leurs lectures attentives sur une version antérieure, permettant d'améliorer la rédaction de cet article.

References

- [1] L. Carlitz, On abelian fields, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) 122–136.
- [2] A. De Médicis, P. Leroux, A unified combinatorial approach for q - (and p, q -) Stirling numbers, J. Statist. Plann. Inference 34 (1993) 89–105.

- [3] R. Ehrenborg, M. Readdy, Juggling and applications to q -analogues, *Discrete Math.* (Special Issue on Algebraic Combin.) 157 (1996) 107–125.
- [4] Ph. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.* 41 (1982) 125–161.
- [5] D. Foata, D. Zeilberger, Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian, *Stud. Appl. Math.* 83 (1990) 31–59.
- [6] A. Garsia, J.B. Remmel, Q -counting rook configurations and a formula of Frobenius, *J. Combin. Theory Ser. A* 41 (1986) 246–275.
- [7] H.W. Gould, The q -stirling numbers of the first and second kinds, *Duke Math. J.* 28 (1961) 281–289.
- [8] P. Leroux, Reduced matrices and q -log-concavity properties of q -stirling numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* 54 (1990) 64–84.
- [9] S. Milne, Restricted growth functions, rank row matching of partition lattices, and q -stirling numbers, *Adv. in Math.* 43 (1982) 173–196.
- [10] B. Sagan, A maj statistics for set partitions, *European J. Combin.* 12 (1991) 69–79.
- [11] E. Steingrímsson, Statistics on ordered partitions of sets, preprint, 1999.
- [12] M. Wachs, σ -restricted growth functions and p, q -stirling numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* 68 (1994) 470–480.
- [13] M. Wachs, D. White, p, q -stirling numbers and set partition statistics, *J. Combin. Theory Ser. A* 56 (1991) 27–46.
- [14] D. White, Interpolating set partition statistics, *J. Combin. Theory Ser. A* 68 (1994) 262–295.