JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series A 29, 121–133 (1980)

Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi

GÉRARD VIENNOT

ENS, Centre de Mathématiques, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

Communicated by the Managing Editors

Received October 3, 1978

We give the first combinatorial interpretation of the coefficients of the power series of the elliptic Jacobi functions sn, cn and dn. This is done by introducing a new class of permutations enumerated by the Euler numbers and a new index about permutations having the same distribution as the Eulerian numbers.

1. INTRODUCTION

Les fonctions elliptiques de Jacobi notées habituellement *sn*, *cn* et *dn* peuvent être définies de la façon suivante:

Si k est un nombre réel compris entre 0 et 1, notons u l'intégrale

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \tag{1}$$

La fonction réciproque $\varphi(u) = \operatorname{am} u$ est encore appelée l'amplitude de u. Alors on pose:

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= \sin \varphi \\ cn(u, k) &= \cos \varphi \\ dn(u, k) &= (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Il existe bien d'autres façons d'introduire ces fonctions elliptiques, notamment avec les fonctions thêta. On verra par exemple Tannery et Molk [17], Neville [15], Tricomi [18]. Nous nous servirons ici seulement du fait que les relations (1) et (2) sont équivalentes aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} sn'(u, k) &= cn(u, k)\, dn(u, k) \\ cn'(u, k) &= -sn(u, k)\, dn(u, k) \\ dn'(u, k) &= -k^2 sn(u, k)\, cn(u, k) \end{aligned} \tag{3}$$

0097-3165/80/050121-14$02.00/0

avec les conditions initiales:

$$sn(0, k) = 0, \qquad cn(0, k) = 1, \qquad dn(0, k) = 1.$$

Les relations (3) permettent de calculer les développements en série entière de ces fonctions. Ceux-ci s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} sn(x, k) &= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n J_{2n+1}(k^2)\, x^{2n+1}/(2n+1)! \\ cn(x, k) &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n J_{2n}(k^2)\, x^{2n}/(2n)! \\ dn(x, k) &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n k^{2n} J_{2n}(1/k^2)\, x^{2n}/(2n)! \end{aligned} \tag{4}$$

Dans ces expressions, $J_{2n+1}(k^2)$ et $J_{2n}(k^2)$ sont des polynômes pairs en k, à coefficients positifs et de degré respectivement $2n$ et $2n - 2$. En rassemblant les deux cas en un seul nous notons:

$$J_n(k^2) = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n-1} J_{n,2p} k^{2p} \qquad (n \geqslant 1). \tag{5}$$

Les premières valeurs de ces coefficients sont donnés par les deux tables suivantes: (voir par exemple Tannery et Molk [17, vol. 4, p. 92]).

Ce fut Guderman [11] qui calcula le premier ces coefficients jusqu'au degré 12. On verra aussi la méthode de calcul de Hermite [12], ou encore Jacobi [13], et Mitra [14]. On ne connait pas actuellement de formules explicites pour $J_{n,2p}$. Remarquons que les polynômes $J_n(k^2)$, n impair, sont symétriques.

TABLE 1

Développement de sn

	k^{2p}						
$2n+1$	k^0	k^2	k^4	k^6	k^8	k^{10}	E_{2n+1}
1	1						1
3	1	1					2
5	1	14	1				16
7	1	135	135	1			272
9	1	1228	5478	1228	1		7936
11	1	11069	165826	165826	11069	1	353792

TABLE 2

Développement de cn

	k^{2p}						
$2n$	k^0	k^2	k^4	k^6	k^8	k^{10}	E_{2n}
2	1						1
4	1	4					5
6	1	44	16				61
8	1	408	912	64			1385
10	1	3688	30768	15808	256		50521
12	1	33212	870640	1538560	259328	1024	2702765

La somme des coefficients des polynômes $J_n(k^2)$ est, pour n impair le *nombre tangent*, et pour n pair le *nombre sécant* appelé encore dans les deux cas *nombre d'Euler* E_n et de série génératrice:

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} E_n\, u^n/n! = -isn(iu, 1) + cn(iu, 1) = \operatorname{tg} u + 1/\cos u. \tag{6}$$

Nous donnons ici la première interprétation combinatoire des coefficients $J_{n,p}$.

Pour ceci nous introduisons au paragraphe 2 une classe de permutation que nous appelons *permutations de Jacobi*, et dénombrée par les nombres d'Euler E_n. Ceci constitue une nouvelle interprétation combinatoire de ces nombres, après les *permutations alternantes* de André [1] et les permutations introduites par Foata et Schützenberger [8] sous le nom de *permutations d'André*, (voir aussi Foata, Strehl [9]).

Au paragraphe 3 nous introduisons un indice $\chi(\sigma)$ associé à une permutation σ. Celui-ci a la même distribution que les *nombres eulériens*, (ou permutations selon le nombre de leurs montées).

Nous montrons alors au paragraphe 4 que $J_{n,2p}$ est le nombre de permutations de Jacobi σ sur $\{1,..., n\}$ telles que $\chi(\sigma) = 2p$. Cette interprétation est mise sous forme de *fonction sous-excédante* au paragraphe 5.

2. PERMUTATIONS DE JACOBI

Notations. Nous notons $[n]$ le segment $[1, n] = \{1, 2,..., n\}$, et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations sur $[n]$. Une permutation est considérée ici comme un mot $\sigma = x_1 \cdots x_n$. Nous notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des mots dont les lettres sont les entiers strictement positifs et tels que chaque lettre apparaisse au plus une fois. Le mot vide est noté Λ, la longueur d'un mot $w \in \mathfrak{S}$ par $|w|$ et la plus petite lettre du mot w par $\min(w)$.

Soit $w = x_1 \cdots x_n$ un mot de $\mathfrak{S}$ et $\{y_1 < \cdots < y_n\}$ l'ensemble totalement ordonné de ses lettres. Soit l l'unique morphisme d'ensemble totalement ordonné $\{y_1, ..., y_n\} \to [n]$.

Nous définissons la permutation $\delta(w)$ de $\mathfrak{S}_n$ par:

$$\delta(w) = l(x_1) \cdots l(x_n). \tag{7}$$

REMARQUE 1. Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ (ne contenant pas 0) et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ il existe un unique mot $w \in \mathfrak{S}$ ayant A comme ensemble de lettres et tel que $\delta(w) = \sigma$.

Enfin le complémentaire $\bar{w}$ d'un mot $w = x_1 \cdots x_n$ de $\mathfrak{S}$ est le mot défini par

$$\bar{w} = \bar{l}(x_1) \cdots \bar{l}(x_n) \text{ avec } \bar{l}(y_i) = y_{n+1-i} \text{ où } \{y_1 < \cdots < y_n\} \text{ est l'ensemble totalement ordonné des lettres de } w. \tag{8}$$

Il est aisé de démontrer le lemme préliminaire:

LEMME 2. *Soient w un mot de $\mathfrak{S}$ et x une lettre de w. Il existe une et une seule factorisation du mot w sous la forme $w = ux\rho(x)v$ où u, $\rho(x)$ et v sont des mots de $\mathfrak{S}$ vérifiant les deux conditions*:

(i) *le mot $\rho(x)$ a toutes ses lettres $>x$,*

(ii) *ou bien v est vide, ou bien sa première lettre est $<x$.*

Si une confusion est à craindre, nous noterons encore $\rho_w(x)$ pour $\rho(x)$.

Par exemple pour $\sigma = 728514963$ et $x = 4$, la factorisation du lemme 2 est $\sigma = (72851, 4, 96, 53)$.

DÉFINITION 3. Une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ est dite permutation de Jacobi ssi pour tout $x \in [n]$, le mot $\rho(x)$ défini au lemme 2 est de longueur paire.

Nous notons $\mathcal{J}_n$ l'ensemble des permutations de Jacobi de $\mathfrak{S}_n$. Par exemple $\sigma = 728514963$ est une permutation de Jacobi. Les mots $\rho(1), ..., \rho(9)$ sont donnés dans le tableau suivant:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho_\sigma(x)$	4963	85	Λ	96	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

LEMME 4. *Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Notons u et v les uniques mots de $\mathfrak{S}$ tels que $\sigma = u1v$. Alors $\sigma \in \mathcal{J}_n$ si on a les deux conditions*:

(i) *$|v|$ est pair,*

(ii) *les permutations $\delta(u)$ et $\delta(v)$ définies par* (7) *sont de Jacobi.*

Soit $\sigma = u1v$ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On a évidemment $\rho(1) = v$. Pour tout x lettre de u (resp. v) le mot $\rho(x)$ est un facteur du mot u (resp. v). Le lemme résulte alors simplement de la relation:

pour tout $w \in \mathfrak{S}$ et $x \in [n]$ on a $\rho_w(x) = \rho_{\delta(w)}(l(x))$ avec l le morphisme intervenant en (7). (9)

Q.E.D.

PROPOSITION 5. *Le nombre de permutations de Jacobi sur $[n]$ est le nombre d'Euler E_n.*

Soit $a_n = |\mathcal{J}_n|$. Le lemme 4 et la remarque 1 prouvent les relations:

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \sum_{2i=0}^{2n} \binom{2n}{2i} a_{2n-2i}a_{2i} \qquad (n \geqslant 1) \\ a_{2n} &= \sum_{2i=0}^{2n-2} \binom{2n-1}{2i} a_{2n-1-2i}a_{2i} \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned} \tag{10}$$

avec les conditions initiales $a_0 = a_1 = 1$.

Notons $f(u)$ et $g(u)$ les séries génératrices exponentielles: $f(u) = \sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1}u^{2n+1}/(2n+1)!$, $g(u) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_{2n}u^{2n}/(2n)!$

Les relations (10) sont équivalentes aux relations:

$$\begin{aligned} f'(u) &= g^2(u) \\ g'(u) &= f(u)\, g(u) \end{aligned} \tag{11}$$

avec les conditions initiales $f(0) = 0$, $g(0) = 1$.

Ces relations se résolvent en:

$$f(u) = \operatorname{tg} u, \qquad g(u) = 1/\cos u \tag{12}$$

Q.E.D.

REMARQUE 6. On peut donner un moyen simple de construire toutes les permutations de $\mathcal{J}_n$. On part du mot $w_0 = 0 \cdots 0$ formé de n zéros. Supposons construits $w_0, w_1, \ldots, x_{x-1}$, mots formés avec les lettres $0, 1, 2, \ldots, x-1 < n$. On choisit un facteur formé de 0 consécutifs et de longueur maximale, puis un zéro dans ce facteur ayant un nombre pair de zéros consécutifs à sa droite. Le mot w_x est alors obtenu en remplacant ce zéro par la lettre x. Alors $\mathcal{J}_n$ est l'ensemble des mots w_n ainsi obtenus.

Par exemple une construction possible est la suivante: ($n = 9$)

$$\begin{aligned}
w_0 &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\\
w_1 &= 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\\
w_2 &= 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\\
w_3 &= 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 3\\
w_4 &= 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 4\ 0\ 0\ 3\\
w_5 &= 0\ 2\ 0\ 5\ 1\ 4\ 0\ 0\ 3\\
w_6 &= 0\ 2\ 0\ 5\ 1\ 4\ 0\ 6\ 3\\
w_7 &= 7\ 2\ 0\ 5\ 1\ 4\ 0\ 6\ 3\\
w_8 &= 7\ 2\ 8\ 5\ 1\ 4\ 0\ 6\ 3\\
w_9 &= 7\ 2\ 8\ 5\ 1\ 4\ 9\ 6\ 3
\end{aligned}$$

3. L'INDICE $\chi(\sigma)$

Soit $w = x_1 \cdots x_n$ un mot de $\mathfrak{S}$. Un élément x_i, $i \in [n]$, est dit *élément saillant* de w ssi $x_i = \min(x_1 \cdots x_i)$.

La suite décroissante des k éléments saillants $s_1 > \cdots > s_k$ de w est aussi définie de manière unique par la condition:

$w = s_1 u_1 s_2 u_2 \cdots s_k u_k$ avec $u_1, \ldots, u_k \in \mathfrak{S}$, $s_1 > \cdots > s_k$ et pour tout $i \in [k]$, toute lettre de u_i est supérieure à s_i. (13)

Remarquons que (13) est aussi équivalent à la condition:

$w = s_1 u_1 \cdots s_k u_k$, avec pour tout $i \in [k]$, $s_i \geqslant 1$, $u_i \in \mathfrak{S}$ et $\rho_w(s_i) = u_i$. (13)′

Par exemple les éléments saillants de $w = 728514963$ sont 7, 2, 1.

DÉFINITION 7. Soit w un mot de $\mathfrak{S}$ et x une lettre de w. La hauteur de la lettre x relativement au mot w la contenant, notée encore $h_w(x)$, est définie par récurrence sur la longueur des mots de $\mathfrak{S}$ comme l'unique fonction vérifiant:

Soit $w = s_1 u_1 \cdots s_k u_k$ l'unique factorisation de w selon (13),

(i) si $x = s_i$, $i \in [k]$, alors $h_w(x) = 0$,

(ii) si x est une lettre de u_i, $i \in [k]$, alors $h_w(x) = 1 + h_{u_i}(x)$.

Par exemple les hauteurs des éléments 1, 2,..., 9 relativement à la permutation $\sigma = 728514963$ sont les suivantes:

hauteur 0: 7, 2, 1

hauteur 1: 8, 5, 4, 3

hauteur 2: 9, 6.

DÉFINITION 8. Soit w un mot de $\mathfrak{S}$. L'indice $\chi(w)$ est le nombre de lettres x de w ayant une hauteur $h_w(x)$ impaire.

Nous démontrons les lemmes préliminaires suivants sur les notions de hauteur $h_w(x)$ et d'indice $\chi(w)$.

LEMME 9. *Soient w un mot de $\mathfrak{S}$, $m = \min(w)$ sa plus petite lettre et u, $v \in \mathfrak{S}$ tels que $w = umv$.*
Alors $\chi(w) = \chi(u) + | v | - \chi(v)$.

Soit $w = s_1 u_1 \cdots s_k u_k$ l'unique factorisation de w sous la forme (13) ou (13)'. On a ici $u = s_1 u_1 \cdots u_{k-1}$, $m = s_k$ et $v = u_k$. Les relations (i) et (ii) de la définition 7, impliquent les deux affirmations:

$$\text{Pour toute lettre } x \text{ de } u,\ h_w(x) = h_u(x). \tag{14}$$

$$\text{Pour toute lettre } x \text{ de } v,\ h_w(x) = 1 + h_v(x). \tag{14'}$$

D'où le lemme. Q.E.D.

Nous définissons maintenant l'application $\theta: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ comme l'unique application vérifiant les deux conditions suivantes:

$$\text{Pour tout } x \in [n],\ \theta(x) = x. \tag{15}$$

Pour tout $w = umv \in \mathfrak{S}$ avec $m = \min(w)$, alors $\theta(w) = \theta(u)\, m\overline{\theta(v)}$ (avec $\overline{\theta(v)}$, le complémentaire de $\theta(v)$ défini en (8)). (15)'

Par exemple si σ est la permutation $\sigma = 4517263$, on calcule successivement

$$\theta(\sigma) = \theta(45)1\ \overline{\theta(7263)}$$

$$\theta(45) = 45$$

$$\theta(7263) = 72\ \overline{\theta(63)} = 7236$$

d'où $\theta(\sigma) = 4512763$.

LEMME 10. *L'application $\theta: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ est une bijection telle que, pour tout mot $w = x_1 \cdots x_n$ de $\mathfrak{S}$, on a, en notant $\theta(w) = y_1 \cdots y_n$:*

$$\textit{Pour tout } i \in [2, n],\ h_w(x_i) \textit{ est impair ssi } y_{i-1} < y_i\,. \tag{16}$$

Le lemme est vrai pour les mots w de longueur 1. Supposons que la restriction de θ aux mots de $\mathfrak{S}$ de longueur n soit une bijection (sur ces mots de longueur n) vérifiant la condition (16). Il est clair avec (15)′ que la restriction de θ aux mots de $\mathfrak{S}$ de longueur $n+1$ est une bijection.

Soit $w = umv$ un mot de $\mathfrak{S}$ de longueur $n+1$ avec $m = \min(w)$. Le fait que ce mot vérifie encore la condition (16) est une simple conséquence de l'hypothèse de récurrence, des relations (14), (14)′, (15)′ et de la propriété suivante:

$$\text{Pour tout } w = x_1 \cdots x_n \in \mathfrak{S} \text{ avec } \bar{w} = y_1 \cdots y_n, \text{ on a } x_{i-1} < x_i \text{ ssi } y_{i-1} > y_i \ (i \in [2, n]). \tag{17}$$

Par récurrence on a donc le lemme. Q.E.D.

Le lemme 10 permet de calculer la distribution de l'indice χ sur $\mathfrak{S}_n$.

Rappelons que les nombres eulériens $A_{n,k}$ sont définis par la relation de récurrence

$$\begin{gathered} A_{1,1} = 1, \qquad A_{1,k} = 0 \qquad (k \neq 1) \\ A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n-k+1)\, A_{n-1,k-1} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \text{ et } k \in [n]. \end{gathered} \tag{18}$$

Le *polynôme eulérien* (de degré $n-1$) est défini par

$$A_n(t) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_{n,k} t^{k-1}$$

et a pour fonction génératrice exponentielle

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} A_n(t)\, u^n/n! = \frac{1-t}{e^{u(t-1)} - t}. \tag{19}$$

Il est bien connu que le nombre eulérien $A_{n,k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ est le nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ ayant k montées, c.a.d. les permutations $\sigma = x_1 \cdots x_n$ de $\mathfrak{S}_n$ ayant k indices $i \in [n-1]$ tels que $x_i < x_{i+1}$.

Parmi les très nombreux articles sur la question, on verra par exemple, Carlitz [3], Comtet [4, pp. 240–246], Foata et Schutzenberger [7], Riordan [16, pp. 38–39, 214–216].

Il est alors évident avec le lemme 10 que la distribution sur $\mathfrak{S}_n$ du paramètre χ est eulérienne, c.à.d.:

PROPOSITION 11. *Le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\chi(\sigma) = k$ $(k \in [0, n-1])$ est égal au nombre eulérien $A_{n,k+1}$.*

On pourrait définir dualement la notion d'éléments saillants de droite à gauche de $w = x_1 \cdots x_n \in \mathfrak{S}$ en prenant $x_i = \min(x_i \cdots x_n)$. On définirait aussi la notion de hauteur à gauche $h'_w(x)$ pour x lettre du mot w. On définit aussi l'application θ' par la condition (15) et la relation obtenue en remplaçant l'égalité de (15)′ par: $\theta'(w) = \overline{\theta'(u)}\, m\theta'(v)$. Le lemme 10 est encore valable pour θ' et la hauteur à gauche $h'_w(x)$.

Rappelons que la permutation $\sigma = x_1 \cdots x_n$ de $\mathfrak{S}_n$ est dite *alternante* *descendante* (resp. *alternante montante*) ssi l'ensemble des indices $i \in [n-1]$ tels que $x_i < x_{i+1}$ est l'ensemble des indices pairs (resp. impairs) de $[n-1]$. Il est classique depuis D. André [1] que ces permutations sont dénombrées par le nombres d'Euler E_n.

Le lecteur vérifira alors la propriété complémentaire suivante:

PROPOSITION 12. *Soit $\sigma = x_1 \cdots x_n$ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ avec n pair (resp. impair). Cette permutation est de Jacobi ssi l'ensemble des indices impairs (resp. pairs) $i \in [n]$ est identique à l'ensemble des indices $i \in [n]$ tels que la hauteur à gauche $h'_\sigma(x_i)$ soit impaire. L'application θ' précédente est une bijection entre $\mathcal{J}_n$ et l'ensemble des permutations alternantes descendantes (resp. montantes) de $\mathfrak{S}_n$.*

On retrouve ainsi le fait que $|\mathcal{J}_n| = E_n$.

Par exemple, pour la permutation de Jacobi $\sigma = 728514963$, on calcule successivement:

$$\theta'(7285) = 7285$$
$$\theta'(4963) = 9463$$
$$\theta'(\sigma) = 582719463$$

qui est bien une permutation alternate montante.

4. INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DES POLYNÔMES $J_n(k^2)$

Nous pouvons maintenant donner l'interprétation combinatoire annoncée:

THÉORÈME 1. *Soit $J_{n,2p}$ ($n \geqslant 1$, $0 \leqslant 2p \leqslant n-1$) le coefficient défini par (4) et (5) comme étant le terme en k^{2p} du polynôme $J_n(k^2)$ intervenant dans le développement en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi $sn(u, k)$, $cn(u, k)$ et $dn(u, k)$.*

Alors $J_{n,2p}$ est le nombre de permutations de Jacobi (définition 3) dont l'indice χ (définition 8) est égal à $2p$.

Les relations de définition (3) des fonctions elliptiques *sn*, *cn* et *dn* sont équivalentes aux relations de récurrence suivantes sur les polynômes $J_n(k^2)$, $n \geqslant 1$, définis par (4):

$$\begin{aligned} J_{2n+1}(k^2) &= \sum_{2i=0}^{2n} \binom{2n}{2i} J_{2n-2i}(k^2)\, k^{2i} J_{2i}(1/k^2) \qquad (n \geqslant 0) \\ J_{2n}(k^2) &= \sum_{2i=0}^{2n-2} \binom{2n-1}{2i} J_{2n-1-2i}(k^2)\, k^{2i} J_{2i}(1/k^2) \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned} \tag{20}$$

avec $J_0 = J_1 = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, notons J'_n le polynôme en k, $J'_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} J'_{n,p} k^p$ avec $J'_{n,p} = |\{\sigma \in \mathscr{J}_n, \chi(\sigma) = p\}|$.

En fait J'_n est un polynôme pair $J'_n(k^2)$ d'après les définitions. Si on note $J''_{n,p} = |\{\sigma \in \mathscr{J}_n, n - \chi(\sigma) = p\}|$ et $J''_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} J''_{n,p} k^p$, on a évidemment

$$J''_{2n,p} = k^{2n} J'_{2n}(1/k^2). \tag{21}$$

La remarque 1, les lemmes 4 et 9 prouvent alors les récurrences:

$$\begin{aligned} J'_{2n+1}(k^2) &= \sum_{2i=0}^{2n} \binom{2n}{2i} J'_{2n-2i}(k^2)\, J''_{2i}(k^2) \qquad (n \geqslant 0) \\ J'_{2n}(k^2) &= \sum_{2i=0}^{2n-2} \binom{2n-1}{2i} J'_{2n-1-2i}(k^2)\, J''_{2i}(k^2) \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned} \tag{22}$$

avec $J''_0 = J'_0 = J'_1 = 1$.

D'après (21), ces relations sont les mêmes que (20). Ainsi $J'_n = J_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Q.E.D.

Exemple 13. Les cinq permutations de $\mathscr{J}_4$ sont les suivantes:

indice $\chi(\sigma) = 0$	indice $\chi(\sigma) = 2$
4321	2431
	4132
	3142
	2143

On a bien $J_{4,0} = 1$ et $J_{4,2} = 4$.

Les 16 permutations de $\mathscr{J}_5$ sont les suivantes:

indice $\chi(\sigma) = 0$	indice $\chi(\sigma) = 2$	indice $\chi(\sigma) = 4$
54321	35421	15432
	52431	
	42531	
	32541	
	54132	
	53142	
	13542	
	43152	
	52143	
	15243	
	42153	
	14253	
	32154	
	13254	

On a bien $J_{5,0} = 1$, $J_{5,2} = 14$, $J_{5,4} = 1$.

REMARQUE 14. Lorsque l'on construit les permutations de Jacobi $\sigma \in \mathcal{J}_n$ selon la méthode exposée à la remarque 6, on peut directement connaître la parité des hauteurs $h_\sigma(x)$, $x \in [n]$ selon la règle suivante:

Quand on passe de w_{x-1} à w_x par insertion de la lettre x:

(i) si x n'a aucune lettre $\neq 0$ à sa gauche dans w_x, alors $h_\sigma(x)$ est paire,

(ii) sinon soit y la plus proche lettre $\neq 0$ de w_x située à gauche de x, alors $h_\sigma(x)$ est de parité opposée à y.

(En fait dans le cas (i), $h_\sigma(x) = 0$; dans le cas (ii) $h_\sigma(x) = 1 + h_\sigma(y)$).

REMARQUE 15. Lorsque n est impair, l'application associant à $\sigma = u1v \in \mathcal{J}_n$ la permutation $\sigma' = v1u$ est, d'après le lemme 4, une bijection $\mathcal{J}_n \to \mathcal{J}_n$. De plus on a d'après le lemme 9,

$$\chi(\sigma') = n - 1 - \chi(\sigma).$$

Ceci prouve géometriquement que le polynôme $J_n(k^2)$ de degré $n-1$ en k est un polynôme symétrique:

$$k^{n-1} J_n(1/k^2) = J_n(k^2).$$

5. INTERPRÉTATION AVEC LES FONCTIONS SOUS-EXCÉDANTES

Les notions introduites ci-dessus se traduisent agréablement en termes de fonctions sous-excédantes.

Une fonction f: $[n] \to [0, n-1]$ est dite *fonction sous-excédante* (on dit parfois aussi fonction strictement sous-excédante) ssi on a

$$\forall i \in [n], \qquad f(i) < i. \tag{23}$$

Nous noterons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des fonctions sous-excédantes sur $[n]$.

Il existe de nombreuses bijections remarquables entre $\mathfrak{S}_n$ et $\mathcal{F}_n$. Nous rappelons ici celle introduite par Françon [10] et Viennot [19], lors de l'étude d'une correspondance entre arbres binaires et permutations. Cette bijection se trouve sous une autre forme dans Burge [2] et a été aussi retrouvée par Foata [6] sous le nom de V-code.

Soit $\sigma = x_1 \cdots x_n$ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On définit $f = \varphi(\sigma)$ par la condition suivante:

$$\begin{aligned}&\text{Pour } x \in [n], \text{ si } x \text{ est élément saillant de } \sigma \text{ alors } f(x) = 0,\\ &\text{sinon soit } x = x_i \text{ et } j = \max\{j, j < i, x_j < x_i\}, \text{ alors } f(x) = x_j.\end{aligned} \tag{24}$$

Par exemple pour $\sigma = 728514963$, $f = \varphi(\sigma)$ est définie par la table:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0	1	1	2	4	0	2	4

L'application $\varphi: \mathfrak{S}_n \to \mathscr{F}_n$ est une bijection (voir par exemple Françon [10] ou Viennot [19]). Elle peut être aussi définie par la condition:

$f = \varphi(\sigma)$ avec pour tout $x \in [0, n-1]$ les éléments $y \in [n]$ tels que $f(y) = x$ sont les éléments saillants du mot $\rho(x)$ (en convenant $\sigma = \rho(0)$). (25)

Nous noterons $d_f{}^0(x)$ ((degré de x relativement à f) le nombre de $y \in [n]$, $f(y) = x$).

On définit la hauteur $h_f(x)$ de x relativement à $f \in \mathscr{F}_n$ par la récurrence

$$\begin{aligned} &\text{si } f(x) = 0, && \text{alors } && h_f(x) = 0 \\ &\text{si } f(x) = y, && \text{alors } && h_f(x) = 1 + h_f(y). \end{aligned} \tag{26}$$

D'après (25), la définition 7 et la définition (26) on a trivialement le

LEMME 16. *Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f = \varphi(\sigma) \in \mathscr{F}_n$ et $x \in [n]$. Alors $h_\sigma(x) = h_f(x)$.*

D'autre part la bijection φ transforme les permutations de Jacobi en les fonctions f sous-excédantes suivantes:

LEMME 17. *Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $f = \varphi(\sigma)$. Alors $\sigma \in \mathscr{F}_n$ ssi le degré $d_f{}^0(x)$ de tout $x \in [n]$ relativement à f est pair.*

En effet d'après (25), ce lemme équivaut à la condition suivante aisée à vérifier avec (13)':

$\forall x \in [n]$, $|\rho(x)|$ est pair ssi le nombre d'éléments saillants de $\rho(x)$ est pair. (27)

Les lemmes 14 et 15 donnent une autre version du théorème 1 sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Le coefficient $J_{n,2p}$ ($n \geqslant 1$, $0 \leqslant 2p \leqslant n-1$) défini par (4) et (5) est égal au nombre de fonctions sous-excédantes f de $\mathscr{F}_n$ telles que chaque élément $x \in [n]$ ait un degré $d_f{}^0(x)$ pair, et ayant $2p$ éléments $x \in [n]$ dont la hauteur $h_f(x)$ est impaire.*

REMARQUE 18. La nouvelle interprétation combinatoire des nombres eulériens $A_{n,k}$ de la proposition 11 devient ici:

Le nombre eulérien $A_{n,k+1}$ est le nombre de fonctions sous-excédantes $f \in \mathscr{F}_n$ ayant k éléments dont la hauteur $h_f(x)$ est impaire.

Cette interprétation est à rapprocher de celle de Dumont [5]: $A_{n,k+1}$ est le nombre de fonctions sous-excédantes $f \in \mathscr{F}_n$ ayant k éléments de degré $d_f^0(x) \geqslant 1$. Notons Im $a(f)$ l'ensemble de ces éléments. Remarquons encore que la bijection φ permet de retrouver cette interpretation car φ transforme les valeurs $x \in [n]$ telles que $x = x_i < x_{i+1}$ (ou montées de σ) en les éléments de Im $a(f)$ (d'après (25) et le fait que x est montée ssi $\rho(x) \neq \Lambda$).

Remerciements

Je remercie vivement M. P. Schützenberger de m'avoir fait connaître les Fonctions elliptiques de Jacobi et de m'avoir convaincu qu'il devait exister une interpretation combinatoire.

Références

1. D. André, Développements de sec x et tan x, *C. R. Acad. Sci. Paris* **88** (1879), 965–967.
2. W. H. Burge, An analysis of a tree sorting method and some properties of a set of trees, *in* "First USA–Japan Computer Conf.," pp. 372–379, 1972.
3. L. Carlitz, Eulerian numbers and polynomials, *Math. Mag.* **33** (1959), 247–260.
4. L. Comtet, "Advanced Combinatorics," Reidel, Dordrecht/Boston, 1974.
5. D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.* **41** (1974), 305–318.
6. D. Foata, Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe des permutations, *in* "Higher Combinatorics" (M. Aigner, éd.), Reidel, Dordrecht, 1977.
7. D. Foata et M. P. Schützenberger, "Théorie géométrique des polynômes eulériens," Lecture Notes in Mathematics n° 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
8. D. Foata et M. P. Schützenberger (1973), Nombres d'Euler et permutations alternantes, *in* "A Survey of Combinatorial Theory," Sympos. Colorado State Univ. (Colorado, 1971), (J. N. Srivastava, et al., Eds.), North-Holland, Amsterdam.
9. D. Foata et V. Strehl, Rearrangements of the symetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers, *Math. Z.* **137** (1973), 257–264.
10. J. Françon, Arbres binaires de recherche: propriétés combinatoires et applications, *R.A.I.R.O.* **10**, n° 12 (1976), 35–50.
11. C. Guderman, Théorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale, *J. de Crelle* **19** (1840), 45–83.
12. C. Hermite, Sur la théorie des fonctions elliptiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **57** (1863), 15, 613–618.
13. Jacobi, Theoriae functionum ellipticarum, *Fundamenta Nova*, (1829) (voir aussi Œuvres complètes ges. W. tI).
14. S. C. Mitra, On the expansion of the Weierstrassian and Jacobian elliptic functions in powers of the argument, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **17** (1926), 159–172.
15. E. H. Neville, "Jacobian Elliptic Functions," Oxford Univ. Press (Clarendon), London, 1944.
16. J. Riordan, "An Introduction to Combinatorial Analysis," Wiley, New York, 1958.
17. J. Tannery et J. Molk, "Eléments de la théorie des fonctions elliptiques," Gauthiers-Villars, Paris, 1902.
18. F. G. Tricomi, "Funzioni Ellittiche," Zanichelli, Bologna, 1951.
19. G. Viennot, Quelques algorithmes de permutations, *in* "Journées algorithmiques," E.N.S Paris 1975, Astérisque n° 38–39, pp. 275–293, Soc. Math. de France, 1975.